

Вестник Московского университета

ISSN 0579–9368



НАУЧНЫЙ
ЖУРНАЛ
*Основан
в 1946 году*

Серия 1
математика
механика

5 / 2020

Вестник Московского университета

Серия 1 МАТЕМАТИКА. МЕХАНИКА

Издательство Московского университета

НАУЧНЫЙ ЖУРНАЛ

Основан в ноябре 1946 г.

№ 5 · 2020 · сентябрь – октябрь

Выходит один раз в два месяца

СОДЕРЖАНИЕ

Математика

- Немиро В. В.* Эндоморфизмы полугрупп обратимых неотрицательных матриц над упорядоченными ассоциативными кольцами 3
- Вуколова Т. М., Симонов Б. В.* О свойствах сумм двойных тригонометрических рядов с кратно-монотонными коэффициентами 8
- Арушанян О. Б., Залеткин С. Ф.* О вычислении приближенного решения обыкновенных дифференциальных уравнений методом рядов Чебышёва и оценка его погрешности 22
- Алимов А. Р.* Геометрическое строение чебышёвских множеств и солнц в трехмерных пространствах с цилиндрической нормой 26

Механика

- Молодцов И. Н.* Прикладные вопросы теории упругопластических процессов А.А. Ильюшина 33
- Влахова А. В., Новодерова А. П.* Занос колесного аппарата на “миксте” 38
- Кугушев Е. И., Попова Т. В., Сазонов С. В.* О движении системы с перемещающимся внутренним элементом при наличии внешнего вязкого трения 50

Краткие сообщения

- Решетников И. А., Канель-Белов А. Я.* Критерий подстановочности палиндромов Штурма и одномерная фактор-динамика 57
- Комков С. А.* Новая формулировка критерия минимального логарифмического темпа роста 60
- Семенов А. Л.* Отображения, сохраняющие отношения, определяемые через линейный порядок 62
- Садрисламов А. У.* Резонансные эффекты колебаний газового пузырька в невязкой и ньютоновской средах 66
- Памяти Рудольфа Алексеевича Васина (1937–2019)* 71

CONTENTS

Mathematics

<i>Nemiro V. V.</i> Endomorphisms of semigroups of invertible non-negative matrices over ordered associative rings	3
<i>Vukolova T. M. and Simonov B. V.</i> Properties of sums of double trigonometric series with multiple-monotone coefficients	8
<i>Arushanyan O. B. and Zaletkin S. F.</i> Computation of approximate solution to ordinary differential equations by the Chebyshev expansions method and its error estimation	22
<i>Alimov A. R.</i> Geometric construction of Chebyshev sets and suns in three-dimensional spaces with cylindrical norm	26

Mechanics

<i>Molodtsov I. N.</i> Applied subjects of the Il'yushin theory of elastoplastic processes	33
<i>Vlakhova A. V. and Novoderova A. P.</i> Skid of a vehicle in the process of "mixed"	38
<i>Kugushev E. I., Popova T. V., and Sazonov S. V.</i> Motion of the system with moving inner element under presence of external viscous friction	50

Short notes

<i>Reshetnikov I. A. and Kanel-Belov A. Ya.</i> Criterion of Sturm palindrome substitution and one-dimensional factor-dynamics	57
<i>Komkov S. A.</i> New formulation of the criterion of minimal logarithmic rate of growth	60
<i>Semenov A. L.</i> Mappings preserving relations defined by linear order	62
<i>Sadrislamov A. U.</i> Resonance effects of gas bubble oscillations in inviscid and Newton media	66
<i>To memory of Rudolf Alekseevitch Vasin (1937–2019)</i>	71

To buy separate issues of "Moscow University Mathematics Bulletin" and "Moscow University Mechanics Bulletin" or subscribe to them one should refer to

Allerton Press Inc.
250 West 57th Street,
New York, USA, NY 10107.
Fax: 646-424-96-95

Математика

УДК 512.534.7 + 512.555

**ЭНДОМОРФИЗМЫ ПОЛУГРУПП
ОБРАТИМЫХ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ МАТРИЦ
НАД УПОРЯДОЧЕННЫМИ АССОЦИАТИВНЫМИ КОЛЬЦАМИ**

В. В. Немиро¹

Пусть R — линейно упорядоченное некоммутативное кольцо с $1/2$; $G_n(R)$ — подполугруппа группы $GL_n(R)$, состоящая из матриц с неотрицательными коэффициентами. В работе описаны эндоморфизмы данной полугруппы при $n \geq 3$.

Ключевые слова: некоммутативные кольца, ассоциативные кольца, упорядоченные кольца, полугруппа неотрицательных обратимых матриц, эндоморфизмы.

Let R be a linearly ordered noncommutative ring with $1/2$ and $G_n(R)$ be the subsemigroup of the group $GL_n(R)$ consisting of all matrices with nonnegative elements. Endomorphisms of this group are described in the paper for $n \geq 3$.

Key words: noncommutative ring, associative ring, ordered ring, semigroup of invertible nonnegative matrices, endomorphisms.

1. Введение. Пусть R — линейно упорядоченное кольцо. Рассмотрим $G_n(R)$ — подполугруппу в группе $GL_n(R)$, состоящую из всех матриц с неотрицательными коэффициентами.

А. В. Михалев и М. А. Шаталова [1] описали все автоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является линейно упорядоченным телом и $n \geq 2$, а Е. И. Бунина и А. В. Михалев [2] — в случае, когда R — произвольное линейно упорядоченное ассоциативное кольцо с $1/2$, $n \geq 3$. Е. И. Бунина и А. В. Михалев [3] нашли необходимые и достаточные условия для того, чтобы эти полугруппы были элементарно эквивалентны. Е. И. Бунина и П. П. Семенов [4] описали автоморфизмы полугруппы обратимых неотрицательных матриц порядка, большего двух, над коммутативными частично упорядоченными кольцами с обратимой двойкой, а в работе [5] нашли необходимые и достаточные условия для их элементарной эквивалентности. Е. И. Бунина [6] описала автоморфизмы полугруппы $G_2(R)$ при условии, что R — частично упорядоченное коммутативное кольцо с обратимой двойкой, порождаемое своими обратимыми элементами, П. П. Семенов [7] — автоморфизмы полугруппы неотрицательных матриц над кольцом целых чисел.

Менее привычной является задача описания всех эндоморфизмов данной полугруппы. В работе [8] описаны эндоморфизмы полугруппы $G_n(R)$ в случае, когда R является линейно упорядоченным коммутативным кольцом.

В настоящей работе мы описываем все эндоморфизмы полугруппы неотрицательных матриц над линейно упорядоченным, не обязательно коммутативным кольцом при $n > 2$. Основной смысл доказанной теоремы состоит в том, что при достаточно большом образе эндоморфизм является стандартным, как и в случае автоморфизмов.

2. Основные понятия. Пусть R — линейно упорядоченное кольцо. Через $G_n(R)$ обозначается подполугруппа группы $GL_n(R)$, состоящая из всех матриц с неотрицательными элементами.

Кольцо R называется *линейно упорядоченным*, если на нем задано отношение частичного порядка \leq , удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $\forall x, y \in R(x \leq y \vee y \leq x)$;
- 2) $\forall x, y, z \in R(x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z)$;
- 3) $\forall x, y \in R(0 \leq x \wedge 0 \leq y \Rightarrow 0 \leq xy)$.

Обозначим положительные и отрицательные элементы кольца R через R_+ и R_- соответственно.

Пусть $e = I_n$ — единичная матрица размером $n \times n$; $\Gamma_n(R)$ — группа, состоящая из всех обратимых элементов из $G_n(R)$; Σ_n — симметрическая группа порядка n ; σ_s — матрица перестановки (т.е. матрица $(\delta_{is(j)})$, где $\delta_{is(j)}$ — символ Кронекера и $s \in \Sigma_n$); S_n — группа, состоящая из всех матриц σ_s . Через N_S будем обозначать нормальную подгруппу в S_n ; $\text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]$ — диагональная

¹Немиро Владислав Викторович — асп. каф. высшей алгебры мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vlad.nemiro@gmail.com.

Nemiro Vladislav Viktorovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Higher Algebra.

матрица с элементами $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ на диагонали, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R_+^*$. Через $D_n(R)$ обозначим группу всех обратимых диагональных матриц из $G_n(R)$, N_D — подгруппа в группе $D_n(R)$.

Через $t_{ij}(x)$ обозначим матрицу $e + xE_{i,j}$, t_{ij} означает $t_{ij}(1)$. Пусть \mathbf{P} — подполугруппа в $G_n(R)$, порожденная всеми матрицами σ ($\sigma \in S_n$), $t_{ij}(x)$ ($x \in R_+, i \neq j$) и $\text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n] \in D_n(R)$.

Будем называть перечисленные матрицы *элементарными*.

Две матрицы $A, B \in G_n(R)$ называются *\mathcal{P} -эквивалентными* (см. [5]), если существуют матрицы $A_j \in G_n(R)$, $j = 0, \dots, k$, такие, что $A = A_0$, $B = A_k$, и матрицы $P_i, \tilde{P}_i, Q_i, \tilde{Q}_i \in \mathbf{P}$, $i = 0, \dots, k-1$, такие, что $P_i A_i \tilde{P}_i = Q_i A_{i+1} \tilde{Q}_i$.

Через $GE_n^+(R)$ обозначим подполугруппу в $G_n(R)$, порожденную всеми матрицами, \mathcal{P} -эквивалентными матрицам из \mathbf{P} .

Если G — некоторая полугруппа (например, $G = R_+^*, G_n(R), GE_n^+(R)$), то гомоморфизм $\lambda: G \rightarrow G$ называется *центральной гомоморфизмом* G в случае, когда $\lambda(G) \subset Z(G)$. Отображение $\Omega: X \mapsto \lambda(X) \cdot X$, где $\lambda(\cdot)$ — центральный гомоморфизм, называется *центральной гомотетией*.

Для каждой матрицы $M \in G_n(R)$ пусть Φ_M обозначает автоморфизм полугруппы $G_n(F)$, такой, что для любого $X \in G_n(F)$ $\Phi_M(X) = MXM^{-1}$ (*внутренний автоморфизм*).

Для каждого $y(\cdot) \in \text{End}(R_+)$ через Φ^y обозначим эндоморфизм полугруппы $G_n(R)$, такой, что $\Phi^y(X) = \Phi^y((x_{ij})) = (y(x_{ij}))$ для любого $X = (x_{ij}) \in G_n(R)$ (*кольцевой эндоморфизм*).

Возьмем кольцевой эндоморфизм Φ^y . Если у нас есть некий гомоморфизм $\lambda: G_n(R) \rightarrow Z_+^*(y(R_+))$, то отображение $\Omega^y: X \mapsto \lambda(X) \cdot \Phi^y(X)$ будем называть *центрально-кольцевым эндоморфизмом*.

3. Действие эндоморфизма на элементарные матрицы. Пусть нам дан некоторый эндоморфизм Φ . Посмотрим, как данный эндоморфизм действует на элементарные матрицы с неотрицательными элементами.

Оценим, как образ эндоморфизма Φ связан с образом матриц $t_{ij}(x)$.

Лемма 1. *Если хотя бы для одной пары $i \neq j$ выполнено $\Phi(t_{ij}) = e$, то $\Phi(t_{kl}(x)) = e$ для любой пары $k \neq l$ и для любого $x > 0$.*

Доказательство. Пусть $\Phi(t_{ij}(x)) = A$. Рассмотрим фиксированные k, l . Пусть элементы $t_{ij}(x)$ и $t_{ik}(x)$ сопряжены между собой матрицей перестановок σ , т.е. выполнено равенство $\sigma t_{ij}(x) \sigma^{-1} = t_{kl}(x)$. В силу того что все t_{ij} сопряжены между собой и $\Phi(t_{ij}) = e$, для любых k, l имеем $\Phi(t_{kl}) = e$. Теперь из соотношения $t_{ij}(x) t_{jk}(1) = t_{jk}(1) t_{ij}(x) t_{ik}(x)$ получаем

$$\begin{aligned} \Phi(t_{ij}(x) t_{jk}(1)) &= \Phi(t_{jk}(1) t_{ij}(x) t_{ik}(x)), \\ \Phi(t_{ij}(x)) \Phi(t_{jk}(1)) &= \Phi(t_{jk}(1)) \Phi(t_{ij}(x)) \Phi(t_{ik}(x)), \\ Ae &= e A \Phi(\sigma t_{ij}(x) \sigma^{-1}), \\ A &= A B A B^{-1}, \\ e &= A. \end{aligned}$$

То есть $\Phi(t_{ij}(x)) = e$.

Лемма 2. *Пусть эндоморфизм Φ таков, что существуют i, j , такие, что $\Phi(t_{ij}) = e$. Тогда образ при эндоморфизме полугруппы GE_n^+ является подгруппой в Γ_n .*

Доказательство. Согласно лемме 1 все $t_{ij}(x)$ переходят в e . В таком случае $\Phi(GE_n^+) = \Phi(\mathbf{P})$. Действительно, пусть матрица M \mathcal{P} -эквивалентна матрице $M_1 \in \mathbf{P}$. Тогда переход от $\Phi(M_1)$ к $\Phi(M)$ осуществляется с помощью обратимых матриц. Значит, $\Phi(M) \in \Phi(P)$. А $\Phi(P)$ в свою очередь лежит в Γ_n .

Под ядром эндоморфизма полугруппы с единицей будем понимать полный прообраз единицы. Легко проверить, что ядро эндоморфизма Φ , ограниченного на Γ_n , является нормальной подгруппой группы Γ_n . Таким образом, в случае, когда $\Phi(t_{ij}) = e$, зная описание всех нормальных подгрупп в Γ_n , мы можем понять, каковы образы полугруппы $GE_n^+(R)$.

Классификация нормальных подгрупп группы Γ_n . Приступим к описанию всех нормальных подгрупп группы Γ_n . Легко заметить, что эта группа состоит из всех мономиальных матриц, т.е. $\Gamma_n(R) = D_n(R) \cdot S_n$.

Действительно, если в матрице с неотрицательными элементами есть хотя бы два ненулевых элемента в строке, то ее обратная матрица не может состоять только из неотрицательных элементов, поскольку в таком случае произведение этих двух матриц даст ненулевой элемент вне диагонали.

В силу того что $\Gamma_n(R)$ является группой, а $\text{Ker} \Phi \cap \Gamma_n(R) \triangleleft \Gamma_n(R)$, для описания действия Φ на подгруппе $\Gamma_n(R)$ достаточно описать нормальные подгруппы группы мономиальных матриц.

Также легко заметить, что нормальная подгруппа группы $\Gamma_n(R)$ является либо подгруппой диагональных матриц, либо полупрямым произведением групп N_S и N_D .

Тривиальность ядра на группе Γ_n . Рассмотрим, как связано ядро эндоморфизма на мономиальных матрицах и образ элемента t_{ij} . Как было указано ранее, N_S является нормальной подгруппой группы S_n . Нетривиальными нормальными подгруппами являются подгруппа четных перестановок для $n \geq 3$ и подгруппа Клейна для $n = 4$. Обозначим через A_n группу матриц перестановок, соответствующих четным подстановкам, и через V_4 подгруппу матриц перестановок группы S_4 , соответствующих группе Клейна.

Лемма 3. Пусть $N_S = S_n$ или $N_S = A_n$. Тогда $\Phi(t_{ij}(x)) = e$.

Доказательство. Пусть $\Phi(t_{12}) = A$. Тогда $\Phi(t_{23}) = \Phi(\sigma_{(123)}t_{12}\sigma_{(123)^{-1}}) = \Phi(t_{12}) = A$. Теперь воспользуемся соотношением $t_{13}t_{23}t_{12} = t_{12}t_{23}$. Поскольку матрица A обратима в $GL_n(R)$, то $\Phi(t_{13}) = e$. Учитывая, что все матрицы t_{ij} сопряжены матрицами подстановок, имеем $\Phi(t_{ij}) = e$, следовательно, $\Phi(t_{ij}(x)) = e$. Поэтому по лемме 2 образом $G_n(R)$ является группа.

Лемма 4. Пусть $N_S = V_4$, тогда $\Phi(t_{ij}(x)) = e$.

Доказательство. В силу того что элемент $\sigma_{(12)(34)}$ лежит в подгруппе V_4 , получаем, что для некоторых a, b, c, d в ядре Φ лежит матрица A вида $A = \sigma_{(12)(34)}\alpha$, где $\alpha = \text{diag}[a, b, c, d]$.

Также в ядре лежат A^{-1} и все матрицы, сопряженные к A . То есть в ядре лежит и $B = [\alpha_1 = 2]A[\alpha_1 = \frac{1}{2}] = [\alpha_1 = 2]\sigma_{(12)(34)}\alpha[\alpha_1 = \frac{1}{2}] = \sigma_{(12)(34)}\alpha[\alpha_1 = \frac{1}{2}, \alpha_2 = 2]$.

Получаем, что диагональная матрица $\beta = \text{diag}[\frac{1}{2}, 2, 1, 1] = A^{-1}B$ также лежит в ядре.

Воспользовавшись выражением $t_{23}^2 = t_{23}(2) = \beta t_{23}\beta^{-1}$, заключаем, что $\Phi(t_{23}) = \Phi(t_{23})^2$, т.е. $\Phi(t_{23}) = e$. Согласно лемме 1 имеем $\Phi(t_{ij}(x)) = e$.

Из лемм 3 и 4 следует, что если какой-то из элементов t_{ij} не лежит в ядре эндоморфизма Φ , то $\text{Ker}\Phi \cap S_n = e$.

Действие эндоморфизма на матрицах подстановок. Рассмотрим ограничение φ эндоморфизма Φ полугруппы $G_n(R)$ на группу $\Gamma_n(R)$. Это — эндоморфизм группы. Пусть $N = N_S \ltimes N_D = \text{Ker}\varphi$. Поскольку мы описали нормальные подгруппы $\Gamma_n(R)$, то мы можем описать и эндоморфизмы $\Gamma_n(R)$.

Лемма 5. Пусть $N_S = \{e\}$, тогда существует такой автоморфизм $\psi \in \text{Aut}(S_n)$, что для каждого $\sigma \in S_n$ имеем $\Phi(\sigma) = \alpha_\sigma\psi(\sigma)$, где $\alpha_\sigma \in D_n(R)$.

Доказательство. Пусть $\Phi(\sigma) = \alpha_\sigma\psi(\sigma)$, где ψ — некоторое отображение S_n в себя. Покажем, что ψ является автоморфизмом группы S_n .

Действительно, для всех $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n$ выполнена следующая цепочка равенств:

$$\alpha_{\sigma_1\sigma_2} \cdot \psi(\sigma_1\sigma_2) = \Phi(\sigma_1 \cdot \sigma_2) = \Phi(\sigma_1) \cdot \Phi(\sigma_2) = \alpha_{\sigma_1} \cdot \psi(\sigma_1) \cdot \alpha_{\sigma_2} \cdot \psi(\sigma_2) = \alpha_{\sigma_1} \alpha'_{\sigma_2} \cdot \psi(\sigma_1)\psi(\sigma_2).$$

Это значит, что $\psi(\sigma_1)\psi(\sigma_2) = \psi(\sigma_1\sigma_2)$.

Если $\sigma_1, \sigma_2 \in S_n, \sigma_1 \neq \sigma_2, \sigma = \psi(\sigma_1) = \psi(\sigma_2)$, то $\Phi(\sigma_1 \cdot \sigma_2^{-1}) = \alpha_{\sigma_1}\sigma\sigma^{-1}\alpha_{\sigma_2}^{-1} = \alpha_{\sigma_1}\alpha_{\sigma_2}^{-1} \in D_n(R)$.

Таким образом, для некоторого $\rho \neq e$ имеем $\Phi(\rho) \in D_n(R)$, чего не может быть в силу конечного порядка элемента ρ . Из всего вышесказанного следует, что ψ является автоморфизмом группы S_n .

С помощью следующей леммы можно доказать первую часть основной теоремы.

Лемма 6. Пусть $N_S = \{e\}$ и $\Phi(t_{ij}) \neq e$ для некоторых i, j . Тогда существует внутренний автоморфизм Φ_M полугруппы $G_n(R)$, такой, что $\Phi_M\Phi(\sigma) = \sigma$ для любого $\sigma \in S_n$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 8 из [8, с. 171–173].

Действие эндоморфизма Φ' на диагональные матрицы. Далее будем рассматривать только эндоморфизмы Φ , не переводящие элементы t_{ij} в единицу.

Согласно предыдущей лемме для такого эндоморфизма Φ существует эндоморфизм Φ' , такой что $\Phi' = \Phi_M \circ \Phi$ и $\Phi'(\sigma) = \sigma$ для любого $\sigma \in S_n$. Далее будем рассматривать этот эндоморфизм Φ' .

Лемма 7. Пусть Φ' — эндоморфизм полугруппы $G_n(R)$, такой, что $\Phi'(\sigma) = \sigma$ для любого $\sigma \in S_n$. Тогда

- 1) $\Phi'(D_n(R)) \subset D_n(R)$;
- 2) $\Phi'(\text{diag}[x, 1, \dots, 1]) = \text{diag}[y, z, \dots, z]$.

Доказательство. Обозначим через $[\alpha_i = x]$ диагональную матрицу, у которой на диагонали, на позиции i , находится элемент x и единицы на всей остальной диагонали. Рассмотрим матрицу $[\alpha_1 = x] = \text{diag}[x, 1, \dots, 1]$. Пусть $\Phi'([\alpha_1 = x]) = D\sigma$, где D — некоторая диагональная матрица. Матрица $[\alpha_1 = x]$ коммутирует со всеми подстановками, оставляющими 1 на месте. А значит, и ее образ будет коммутировать со всеми образами этих подстановок. Откуда можно сделать вывод, что $\sigma = e$ и $D = \text{diag}[y, z, \dots, z]$. Аналогичное заключение можно сделать и относительно матрицы с неединичным элементом на любом (не обязательно первом) месте. Эти матрицы порождают группу всех диагональных матриц. Следовательно, образ любой диагональной матрицы — диагональный.

Докажем лемму, которая определяет образ всех диагональных матриц.

Лемма 8. Пусть эндоморфизм Φ' переводит все диагональные матрицы в скалярные. Тогда все матрицы t_{ij} лежат в его ядре.

Доказательство. Рассмотрим матрицу $[\alpha_1 = 2] = \text{diag}[2, 1, \dots, 1]$. Пусть образом матрицы $[\alpha_1 = 2]$ является матрица ae . Тогда получаем следующую цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \Phi'(t_{12}) &= \Phi'([\alpha_3 = 2]t_{12}[\alpha_3 = \frac{1}{2}]) = \Phi'([\alpha_3 = 2])\Phi'(t_{12})\Phi'([\alpha_3 = \frac{1}{2}]) = \\ &= ae\Phi'(t_{12})a^{-1}e = \Phi'([\alpha_1 = 2])\Phi'(t_{12})\Phi'([\alpha_1 = \frac{1}{2}]) = \\ &= \Phi'([\alpha_1 = 2]t_{12}[\alpha_1 = \frac{1}{2}]) = \Phi'(t_{12}^2) = (\Phi'(t_{12}))^2. \end{aligned}$$

Следовательно, $\Phi'(t_{12}) = e$. Согласно лемме 1 все матрицы t_{ij} лежат в ядре.

Формально мы получили, что в рассматриваемом случае $\Phi'(t_{ij}) \neq e$ образ диагональных матриц не может состоять только из скалярных матриц.

Построение эндоморфизма полукольца неотрицательных элементов.

Лемма 9. Если эндоморфизм $\Phi' \in \text{End}(G_n(R))$ таков, что $\Phi'(\sigma) = \sigma$ для любого $\sigma \in S_n$, то для всех $X \in G_2(R)$

$$\Phi' \begin{pmatrix} X & \\ & I_{n-2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y & \\ & aI_{n-2} \end{pmatrix},$$

где $Y \in G_2(R)$, $a \in R^*$.

Доказательство. Заметим, что данная матрица коммутирует с матрицами подстановок, оставляющими на месте 1 и 2. Также исходная матрица коммутирует со всеми диагональными матрицами вида $\text{diag}[1, \dots, t, \dots, 1]$ и найдется t , такое, что ее образ не лежит в центре. Из этого сразу следует утверждение леммы.

Лемма 10. Пусть Φ' — эндоморфизм полугруппы $G_n(R)$, такой, что $\Phi'(\sigma) = \sigma$ для любого $\sigma \in S_n$ и $\Phi'(t_{ij}) \neq e$. Тогда $\Phi'(t_{12}) = t_{12}$.

Доказательство. Заметим, что $\Phi'(t_{12})$, $\Phi'(t_{13})$ и $\Phi'(t_{23})$ связаны следующими соотношениями:

- 1) $\Phi'(t_{13}) = \Phi'(\sigma_{(23)}t_{12}\sigma_{(23)}) = \sigma_{(23)}\Phi'(t_{12})\sigma_{(23)}$;
- 2) $\Phi'(t_{23}) = \Phi'(\sigma_{(123)}t_{12}\sigma_{(321)}) = \sigma_{(123)}\Phi'(t_{12})\sigma_{(321)}$.

Рассмотрим только первые три столбца и три строки. Согласно лемме 9 для первых трех столбцов и строк получаем

$$\Phi'(t_{12}) = \begin{pmatrix} xy & \\ zt & \\ & a \end{pmatrix}, \quad \Phi'(t_{13}) = \begin{pmatrix} x & y \\ a & \\ z & t \end{pmatrix}, \quad \Phi'(t_{23}) = \begin{pmatrix} a & \\ xy & \\ zt & \end{pmatrix}.$$

Для выписанных выше элементов выполнено $t_{12}t_{13} = t_{13}t_{12}$. Приравнивая значения в ячейке (3, 2), получаем $zy = 0$. То есть либо $z = 0$, либо $y = 0$. В силу этого имеем $t \neq 0$ и $x \neq 0$, так как иначе матрица $\Phi'(t_{12})$ будет содержать столбец или строку из нулей, т.е. будет вырожденной.

В силу равенства $t_{12}t_{23} = t_{23}t_{12}$ имеем

$$\begin{pmatrix} xa & yx & y^2 \\ za & tx & ty \\ & az & at \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax^2 & aya & axy \\ xzx + yaz & xta & xzy + yat \\ z^2x + taz & zta & z^2y + tat \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax^2 & aya & axy \\ xzx & xta & yat \\ z^2x + taz & zta & tat \end{pmatrix}.$$

Из равенства элементов на позиции (3, 3) получаем $at = tat$. Невырожденность t и a влечет $t = 1$.

Рассмотрим элементы, расположенные в позиции (3, 1). Получаем $z^2x + az = 0$, или $z^2x + zx = zx(z + 1) = 0$. Так как $x \neq 0$ и $z \geq 0$, то равенство $zx(z + 1) = 0$ возможно только при $z = 0$.

Равенство $t_{12}t_{23} = t_{23}t_{12}$ в матричной форме будет выглядеть следующим образом:

$$\begin{pmatrix} xa & yx & y^2 \\ x & y \\ & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax^2 & aya & axy \\ xa & ya \\ & a \end{pmatrix}.$$

Из равенства $xa = x$ на позиции (2, 2) и $x \neq 0$ следует, что $a = 1$. В силу равенства $xa = ax^2$ на позиции (1, 1) имеем $x = 1$. То есть в позиции (1, 3) записано $y^2 = y$. Это значит, что $y = 1$ или $y = 0$. В случае $y = 0$ получаем, что $\Phi'(t_{12}) = e$, т.е. $y = 1$ и $\Phi'(t_{12}) = t_{12}$.

Лемма 11. Пусть эндоморфизм $\Phi' \in \text{End}(G_n(R))$ таков, что $\Phi'(\sigma) = \sigma$ для любого $\sigma \in S_n$. Тогда $\Phi(t_{12}(x)) = t_{12}(b(x))$, где b — эндоморфизм полукольца R_+ .

Доказательство аналогично доказательству из [6, с. 17–20].

Теорема. Пусть Φ — эндоморфизм полугруппы $G_n(R)$, $n \geq 3$, где R — линейно упорядоченное, не обязательно коммутативное кольцо с обратимой двойкой. Тогда выполнено одно из двух условий:

1) образом полугруппы $GE_n^+(R)$ является некоторая подгруппа группы $\Gamma_n(R)$, при этом все матрицы $t_{ij}(x)$ переходят в единичную;

2) существуют $M \in \Gamma_n(R)$ и центрально-кольцевой эндоморфизм Ω^b , такие, что Φ совпадает с $\Phi_M \circ \Omega^b$ на полугруппе $GE_n^+(R)$.

Доказательство. Для доказательства первого случая рассмотрим N_S . Если N_S является нетривиальной подгруппой, то согласно леммам 3 и 4 получаем, что $\Phi(t_{ij}) = e$.

В случае, когда $n = 6$, $N_S = \{e\}$ и автоморфизм $\psi: S_n \rightarrow S_n$ не является стандартным, как следствие леммы 6 получаем, что $\Phi(t_{ij}) = e$.

В обоих случаях согласно лемме 2 образом всей полугруппы $GE_n^+(R)$ является некоторая подгруппа группы $\Gamma_n(R)$, при этом все матрицы $t_{ij}(x)$ переходят в единичную.

Осталось рассмотреть случай, когда $\Phi(t_{ij}) \neq e$.

Согласно лемме 6 существует такой внутренний автоморфизм Φ_M полугруппы $G_n(R)$, что $\Phi_M \Phi(\sigma) = \sigma$ для любого $\sigma \in S_n$.

По лемме 11 существует такой эндоморфизм b полукольца R_+ , что $\Phi(t_{ij}(x)) = t_{ij}(b(x))$. Заметим, что эндоморфизм $\Phi'' = \Phi_M \circ \Phi^b$ совпадает с эндоморфизмом Φ на полугруппе, порожденной матрицами подстановок и $t_{ij}(x)$.

Обозначим $\Phi' = (\Phi_M)^{-1} \circ \Phi$. Тогда образ диагональной матрицы будет следующим: $\Phi'([\alpha_1 = x]) = \Phi'(\text{diag}[x, 1, \dots, 1]) = \text{diag}[\xi(x), \gamma(x), \dots, \gamma(x)]$.

Заметим, что матрица $[\alpha_1 = x]$ коммутирует с любой матрицей вида $\begin{pmatrix} 1 & \\ & A_{n-1} \end{pmatrix}$. Из этого следует, что $\gamma(x)$ коммутирует с $b(R_+)$, т.е. $\gamma(x) \in Z_+^*(R_+)$.

Как известно, $\Phi^b([\alpha_1 = x]) = \text{diag}[b(x), 1, \dots, 1]$. Используя соотношения $[\alpha_1 = x]t_{12}(1)[\alpha_1 = x^{-1}] = t_{12}(x)$ и $\Phi'(t_{12}(x)) = \Phi^b(t_{12}(x))$, получаем $\xi(x)(\gamma(x))^{-1} = b(x)$. Тогда имеем $\Phi'([\alpha_1 = x]) = \gamma(x)\Phi^b([\alpha_1 = x])$. Заметим, что отображение $\gamma(\cdot): R_+ \rightarrow R_+$ мультипликативно.

Если $\alpha = \text{diag}[x_1, \dots, x_n] \in D_n(R)$, то $\Phi'(\alpha) = \gamma(x_1 \dots x_n)\Phi^b(\alpha)$.

Ясно, что любая матрица $A \in \mathbf{P}$ может быть представлена в виде $A = \text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]A_1 \dots A_k$, где $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R_+$, $A_1, \dots, A_k \in \{\sigma, t_{ij}(x) \mid \sigma \in S_n, x \in R_+, i, j = 1, \dots, n, i \neq j\}$. Тогда $\Phi'(A) = \gamma(\alpha_1 \dots \alpha_n) \cdot \Phi^b(A)$.

Теперь введем отображение $\bar{\gamma}(\cdot): \mathbf{P} \rightarrow R_+$ с помощью следующего правила: если $A \in \mathbf{P}$ и $A = \text{diag}[\alpha_1, \dots, \alpha_n]A_1 \dots A_k$, где $A_1, \dots, A_k \in \{\sigma, t_{ij}(x) \mid \sigma \in S_n, x \in R_+, i, j = 1, \dots, n, i \neq j\}$, то $\bar{\gamma}(A) = \gamma(\alpha_1 \dots \alpha_n)$. Так как $\bar{\gamma}(AA')\Phi^b(AA') = \Phi'(AA') = \Phi'(A)\Phi'(A') = \bar{\gamma}(A)\Phi^b(A) \cdot \bar{\gamma}(A')\Phi^b(A') = \bar{\gamma}(A)\bar{\gamma}(A')\Phi^b(AA')$, то $\bar{\gamma}$ является гомоморфизмом $\mathbf{P} \rightarrow R_+$.

Теперь мы видим, что на полугруппе \mathbf{P} эндоморфизм Φ совпадает с эндоморфизмом $\Phi_M \circ \Omega^b$, где для всех $A \in \mathbf{P}$ выполнено $\Omega^b(A) = \bar{\gamma}(A) \cdot \Phi^b(A)$.

Пусть $B \in GE_n^+(R)$. Тогда матрица B \mathcal{P} -эквивалентна некоторой матрице $A \in \mathbf{P}$. Легко заметить, что мы можем продолжить отображение $\bar{\gamma}(\cdot): \mathbf{P} \rightarrow R_+^*$ до некоторого отображения $\lambda(\cdot): GE_n^+(R) \rightarrow R_+^*$, такого, что $\Phi'(B) = \lambda(B) \cdot \Phi^b(B)$ для каждого $B \in GE_n^+(R)$. В итоге получим $\Phi(B) = \Phi_M(B)\Omega^b(B)$, где $\Omega^b: B \mapsto \lambda(B) \cdot \Phi^b(B)$. Теорема доказана.

Автор приносит благодарность рецензенту за внимательное отношение к работе и ценные замечания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Михалев А.В., Шаталова М.А. Автоморфизмы и антиавтоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Матем. сб. 1970. **81**, № 4. 600–609.
2. Бунина Е.И., Михалев А.В. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фунд. и прикл. матем. 2005. **11**, № 2. 3–23.
3. Бунина Е.И., Михалев А.В. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами // Фунд. и прикл. матем. 2006. **12**, № 2. 39–53.

4. Бунина Е.И., Семенов П.П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // Фунд. и прикл. матем. 2008. **14**, № 2. 69–100.
5. Бунина Е.И., Семенов П.П. Элементарная эквивалентность полугруппы обратимых матриц с неотрицательными элементами над частично упорядоченными кольцами // Фунд. и прикл. матем. 2008. **14**, № 4. 75–85.
6. Бунина Е.И. Автоморфизмы полугруппы неотрицательных обратимых матриц порядка два над частично упорядоченными коммутативными кольцами // Матем. заметки. 2011. **91**, № 1. 3–12.
7. Семенов П.П. Автоморфизмы полугруппы обратимых матриц с неотрицательными целыми элементами // Матем. сб. 2012. **203**, № 9. 117–132.
8. Семенов П.П. Эндоморфизмы полугрупп обратимых неотрицательных матриц над упорядоченными кольцами // Фунд. и прикл. матем. 2012. **17**, № 5. 165–178.

Поступила в редакцию
17.07.2019

УДК 517.5

О СВОЙСТВАХ СУММ ДВОЙНЫХ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ РЯДОВ С КРАТНО-МОНОТОННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Т. М. Вуколова¹, Б. В. Симонов²

Исследованы суммы двойных рядов по синусам и косинусам с кратно-монотонными коэффициентами. Получены условия принадлежности этих сумм классам типа Орлича с весами.

Ключевые слова: ряды, коэффициенты рядов, кратная монотонность, последовательность, сумма.

Sums of double sine and cosine series with multiply monotonic coefficients are studied. Sufficient conditions for such sums to belong to Orlich's weighted classes are obtained.

Key words: series, coefficients of series, multiple monotonicity, sequence, sum.

1. Введение. Будем рассматривать тригонометрические ряды вида

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1 n_2} \sin n_1 x_1 \sin n_2 x_2, \quad (1)$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} a_{n_1 n_2} \sin n_1 x_1 \cos n_2 x_2, \quad (2)$$

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1 n_2} \cos n_1 x_1 \sin n_2 x_2, \quad (3)$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} a_{n_1 n_2} \cos n_1 x_1 \cos n_2 x_2, \quad (4)$$

где для краткости положим $\cos 0 \cdot x_1 = \cos 0 \cdot x_2 = \frac{1}{2}$.

Будем считать, что коэффициенты этих рядов удовлетворяют условию

$$a_{n_1 n_2} \longrightarrow 0 \quad (5)$$

¹ Вуколова Татьяна Михайловна — канд. физ.-мат. наук, доцент Института русского языка и культуры МГУ, e-mail: tmvukolova@mail.ru.

² Симонов Борис Витальевич — канд. физ.-мат. наук, доцент Волгоград. гос. техн. ун-та, e-mail: simonov-b2002@yandex.ru.

Vukolova Tatyana Mikhailovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Institute of Russian Language and Culture.

Simonov Boris Vital'evich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Volgograd State Technical University.

при $n_1 \rightarrow \infty$ и любом фиксированном n_2 и при $n_2 \rightarrow \infty$ и любом фиксированном n_1 . Для целых $k_1 \geq 1, k_2 \geq 1$ обозначим

$$\Delta_{k_1 k_2} a_{n_1 n_2} = \sum_{i=0}^{k_1} (-1)^i C_{k_1}^i \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^j C_{k_2}^j a_{n_1+i, n_2+j}, \quad \Delta_{0,0} a_{n_1 n_2} = a_{n_1 n_2},$$

$$\Delta_{0 k_2} a_{n_1 n_2} = \sum_{j=0}^{k_2} (-1)^j C_{k_2}^j a_{n_1, n_2+j}, \quad \Delta_{k_1 0} a_{n_1 n_2} = \sum_{i=0}^{k_1} (-1)^i C_{k_1}^i a_{n_1+i, n_2},$$

где $C_n^m = n(n-1)\dots(n-m+1)/m!$. Пусть даны числовой ряд

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} c_{n_1 n_2} \tag{6}$$

и его частичная сумма $S_{m_1 m_2} = \sum_{n_2=0}^{m_2} \sum_{n_1=0}^{m_1} c_{n_1 n_2}$.

Говорят, что ряд (6) сходится по Прингсхейму к сумме S [1, с. 27], если существует такое число S , что для любого $\varepsilon > 0$ найдутся натуральные числа N_1 и N_2 , такие, что $|S_{m_1 m_2} - S| < \varepsilon$ при любых $m_1 > N_1, m_2 > N_2$.

Из работы [2] следует, что если последовательность $\{a_{n_1 n_2}\}$ удовлетворяет условию (5) и $\Delta_{k_1 k_2} a_{n_1 n_2} \geq 0$ для любых натуральных n_1 и n_2 и некоторых $k_1 \geq 1$ и $k_2 \geq 1$, то каждый из рядов (1)–(4) сходится по Прингсхейму всюду, кроме, может быть, множества плоской меры нуль. Пусть $r_1 = 1, 2, r_2 = 1, 2$. Через $f_{r_1 r_2}(x_1, x_2)$ обозначим сумму ряда (1) при $r_1 = r_2 = 1$, сумму ряда (2) при $r_1 = 1, r_2 = 2$, сумму ряда (3) при $r_1 = 2, r_2 = 1$, сумму ряда (4) при $r_1 = r_2 = 2$.

Приведем известный результат, устанавливающий связь между поведением коэффициентов рядов (1), (2), (3) и (4) и принадлежностью функций $f_{11}(x_1, x_2), f_{12}(x_1, x_2), f_{21}(x_1, x_2), f_{22}(x_1, x_2)$ соответственно различным $L_{p_1 p_2}$ -пространствам.

Теорема А [2]. Пусть числовая последовательность $\{a_{n_1 n_2}\}$ удовлетворяет условию (5) и $\Delta_{k_1 k_2} a_{n_1 n_2} \geq 0$ для некоторых натуральных чисел k_1 и k_2 и любых целых неотрицательных чисел n_1 и n_2 . Тогда при любых $p_i \in (0, +\infty)$ ($i = 1, 2$) справедливы неравенства:

а) в случае $k_1 = 1, k_2 = 1$

$$C_1 \left\{ \sum_{n_2=1}^{\infty} (n_2 + 1)^{p_2 - 2} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} (n_1 + 1)^{p_1 - 2} a_{n_1 n_2}^{p_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \right\}^{\frac{1}{p_2}} \leq \|f_{11}(x_1, x_2)\|_{p_1 p_2} \leq$$

$$\leq C_2 \left\{ \sum_{n_2=1}^{\infty} (n_2 + 1)^{p_2 - 2} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} (n_1 + 1)^{p_1 - 2} a_{n_1 n_2}^{p_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \right\}^{\frac{1}{p_2}};$$

б) в случае $k_1 = 1, k_2 = 2$

$$C_3 \left\{ \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_2 + 1)^{2p_2 - 2} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} (n_1 + 1)^{p_1 - 2} (\Delta_{01} a_{n_1 n_2})^{p_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \right\}^{\frac{1}{p_2}} \leq \|f_{12}(x_1, x_2)\|_{p_1 p_2} \leq$$

$$\leq C_4 \left\{ \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_2 + 1)^{2p_2 - 2} \left[\sum_{n_1=1}^{\infty} (n_1 + 1)^{p_1 - 2} (\Delta_{01} a_{n_1 n_2})^{p_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \right\}^{\frac{1}{p_2}};$$

в) в случае $k_1 = 2, k_2 = 1$

$$C_5 \left\{ \sum_{n_2=1}^{\infty} (n_2 + 1)^{p_2 - 2} \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} (n_1 + 1)^{2p_1 - 2} (\Delta_{10} a_{n_1 n_2})^{p_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \right\}^{\frac{1}{p_2}} \leq \|f_{21}(x_1, x_2)\|_{p_1 p_2} \leq$$

$$\leq C_6 \left\{ \sum_{n_2=1}^{\infty} (n_2 + 1)^{p_2 - 2} \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} (n_1 + 1)^{2p_1 - 2} (\Delta_{10} a_{n_1 n_2})^{p_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \right\}^{\frac{1}{p_2}};$$

г) в случае $k_1 = 2, k_2 = 2$

$$C_7 \left\{ \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_2 + 1)^{2p_2-2} \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} (n_1 + 1)^{2p_1-2} (\Delta_{11} a_{n_1 n_2})^{p_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \right\}^{\frac{1}{p_2}} \leq \|f_{22}(x_1, x_2)\|_{p_1 p_2} \leq \\ \leq C_8 \left\{ \sum_{n_2=0}^{\infty} (n_2 + 1)^{2p_2-2} \left[\sum_{n_1=0}^{\infty} (n_1 + 1)^{2p_1-2} (\Delta_{11} a_{n_1 n_2})^{p_1} \right]^{\frac{p_2}{p_1}} \right\}^{\frac{1}{p_2}},$$

где положительные постоянные $C_1 - C_8$ не зависят от последовательности $\{a_{n_1 n_2}\}$.

Заметим, что все эти и ниже следующие неравенства понимаются следующим образом: из конечности правой части следует конечность левой части. Далее, C, C_1, C_2, \dots — положительные постоянные, не обязательно одинаковые в различных формулах.

Результат работы [2] является обобщением известной теоремы Харди–Литлвуда. В настоящей работе доказываются аналогичные оценки для весовых классов $L(\varphi_1, \varphi_2, w_1, w_2)$.

2. Определения и формулировки основных результатов. Функция $\varphi(x)$ называется почти возрастающей на (a, b) (см. [3]), если существует такая положительная постоянная C_1 , что $\varphi(x_1) \leq C_1 \varphi(x_2)$ при любых $a < x_1 \leq x_2 < b$. Функция $\varphi(x)$ удовлетворяет на $(0, a)$ Δ_2 -условию, если существует такая положительная постоянная C_2 , что $\varphi(x) \leq C_2 \varphi(\frac{x}{2})$ для любых $0 < x < a$.

Через Φ обозначим совокупность неотрицательных на $(0, +\infty)$ функций $\varphi(x)$, почти возрастающих, удовлетворяющих Δ_2 -условию и условию $\varphi(0) = 0$; W — множество измеримых, неотрицательных почти всюду на $(0, 2\pi)$ функций $w(x)$, таких, что $\int_0^{2\pi} w(x) dx < \infty$; $\tilde{w}(x) = w(x) + w(2\pi - x)$; $[a]$ — целая часть числа a .

Пусть $\varphi_i \in \Phi, w_i \in W (i = 1, 2)$. Классом $L(\varphi_1, \varphi_2, w_1, w_2)$ назовем множество измеримых функций $f(x_1, x_2)$, 2π -периодических по каждой переменной и таких, что

$$\int_0^{2\pi} w_2(x_2) \varphi_2 \left(\int_0^{2\pi} w_1(x_1) \varphi_1 (|f(x_1, x_2)|) dx_1 \right) dx_2 < \infty.$$

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. Пусть функции $\varphi_i \in \Phi, w_i \in W (i = 1, 2)$ и таковы, что для любых $\delta \in (0, \pi)$

$$\int_0^{\delta} \tilde{w}_i(x) dx \leq C \int_{\frac{\delta}{2}}^{\delta} \tilde{w}_i(x) dx (i = 1, 2), \tag{7}$$

где C не зависит от δ .

Пусть последовательность $\{a_{n_1 n_2}\}$ удовлетворяет условию (5) и $\Delta_{k_1 k_2} a_{n_1 n_2} \geq 0$ для некоторых натуральных чисел k_1 и k_2 и любых целых неотрицательных чисел n_1 и n_2 .

Тогда справедливы неравенства:

а) в случае $k_1 = 1, k_2 = 1$

$$\int_0^{2\pi} w_2(x_2) \varphi_2 \left(\int_0^{2\pi} w_1(x_1) \varphi_1 (|f_{11}(x_1, x_2)|) dx_1 \right) dx_2 \leq \\ \leq C_1 \sum_{n_2=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\frac{\pi}{n_1}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 (n_1 n_2 a_{n_1 n_2}) \right); \tag{8}$$

б) в случае $k_1 = 1, k_2 = 2$

$$\int_0^{2\pi} w_2(x_2) \varphi_2 \left(\int_0^{2\pi} w_1(x_1) \varphi_1 (|f_{12}(x_1, x_2)|) dx_1 \right) dx_2 \leq$$

$$\leq C_2 \sum_{n_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_2+2}}^{\frac{\pi}{n_2+1}} \widetilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\frac{\pi}{n_1}} \widetilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(n_1(n_2+1)^2 \Delta_{01} a_{n_1 n_2} \right) \right); \tag{9}$$

в) в случае $k_1 = 2, k_2 = 1$

$$\int_0^{2\pi} w_2(x_2) \varphi_2 \left(\int_0^{2\pi} w_1(x_1) \varphi_1(|f_{21}(x_1, x_2)|) dx_1 \right) dx_2 \leq$$

$$\leq C_3 \sum_{n_2=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2}} \widetilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_1+2}}^{\frac{\pi}{n_1+1}} \widetilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left((n_1+1)^2 n_2 \Delta_{10} a_{n_1 n_2} \right) \right); \tag{10}$$

г) в случае $k_1 = 2, k_2 = 2$

$$\int_0^{2\pi} w_2(x_2) \varphi_2 \left(\int_0^{2\pi} w_1(x_1) \varphi_1(|f_{22}(x_1, x_2)|) dx_1 \right) dx_2 \leq$$

$$\leq C_4 \sum_{n_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_2+2}}^{\frac{\pi}{n_2+1}} \widetilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_1+2}}^{\frac{\pi}{n_1+1}} \widetilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left((n_1+1)^2 (n_2+1)^2 \Delta_{11} a_{n_1 n_2} \right) \right), \tag{11}$$

где положительные постоянные $C_1 - C_4$ не зависят от последовательности $\{a_{n_1 n_2}\}$.

Теорема 2. Пусть функции $\varphi_i \in \Phi$, $w_i \in W (i = 1, 2)$ и таковы, что для любых $\delta_i \in (0, \pi)$ и любых $b_i \geq \pi / (8\delta_i) (i = 1, 2)$

$$\int_{\frac{\delta_i}{2}}^{\delta_i} \widetilde{w}_i(x_i) \sin^2(b_i x_i) dx_i \geq C \int_{\frac{\delta_i}{2}}^{\delta_i} \widetilde{w}_i(x_i) dx_i, \tag{12}$$

где C не зависит от δ_i и $b_i (i = 1, 2)$.

Пусть последовательность $\{a_{n_1 n_2}\}$ удовлетворяет условию (5) и $\Delta_{k_1 k_2} a_{n_2 n_2} \geq 0$ для некоторых натуральных чисел k_1 и k_2 и любых целых неотрицательных чисел n_1 и n_2 .

Тогда справедливы утверждения:

а) если $k_1 = 1, k_2 = 1$ и функция $w_i(x_i)$ дополнительно удовлетворяет условию $\widetilde{w}_i(\pi - x_i) \leq C_i \widetilde{w}_i(x_i) (i = 1, 2)$ для всех $x_i \in (0, \pi)$, где C_i не зависит от $x_i (i = 1, 2)$, то

$$\int_0^{2\pi} w_2(x_2) \varphi_2 \left(\int_0^{2\pi} w_1(x_1) \varphi_1(|f_{11}(x_1, x_2)|) dx_1 \right) dx_2 \geq$$

$$\geq C_1 \sum_{n_2=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2}} \widetilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\frac{\pi}{n_1}} \widetilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(n_1 n_2 a_{n_1 n_2} \right) \right); \tag{13}$$

б) если $k_1 = 1, k_2 = 2$ и функция $w_1(x_1)$ дополнительно удовлетворяет условию $\widetilde{w}_1(\pi - x_1) \leq C_1 \widetilde{w}_1(x_1)$ для всех $x_1 \in (0, \pi)$, где C_1 не зависит от x_1 , то

$$\int_0^{2\pi} w_2(x_2) \varphi_2 \left(\int_0^{2\pi} w_1(x_1) \varphi_1(|f_{12}(x_1, x_2)|) dx_1 \right) dx_2 \geq$$

$$\geq C_2 \sum_{n_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_2+2}}^{\frac{\pi}{n_2+1}} \widetilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{n_1=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_1+1}}^{\frac{\pi}{n_1}} \widetilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(n_1(n_2+1)^2 \Delta_{01} a_{n_1 n_2} \right) \right); \quad (14)$$

в) если $k_1 = 2, k_2 = 1$ и функция $w_2(x_2)$ дополнительно удовлетворяет условию $\widetilde{w}_2(\pi - x_2) \leq C_2 \widetilde{w}_2(x_2)$ для всех $x_2 \in (0, \pi)$, где C_2 не зависит от x_2 , то

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} w_2(x_2) \varphi_2 \left(\int_0^{2\pi} w_1(x_1) \varphi_1(|f_{21}(x_1, x_2)|) dx_1 \right) dx_2 \geq \\ & \geq C_3 \sum_{n_2=1}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_2+1}}^{\frac{\pi}{n_2}} \widetilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_1+2}}^{\frac{\pi}{n_1+1}} \widetilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left((n_1+1)^2 n_2 \Delta_{10} a_{n_1 n_2} \right) \right); \end{aligned} \quad (15)$$

г) если $k_1 = 2, k_2 = 2$, то

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} w_2(x_2) \varphi_2 \left(\int_0^{2\pi} w_1(x_1) \varphi_1(|f_{22}(x_1, x_2)|) dx_1 \right) dx_2 \geq \\ & \geq C_4 \sum_{n_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_2+2}}^{\frac{\pi}{n_2+1}} \widetilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_1+2}}^{\frac{\pi}{n_1+1}} \widetilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left((n_1+1)^2 (n_2+1)^2 \Delta_{11} a_{n_1 n_2} \right) \right), \end{aligned} \quad (16)$$

где положительные постоянные $C_1 - C_4$ не зависят от последовательности $\{a_{n_1 n_2}\}$.

Замечание. Если $\varphi_1(t) = t^{p_1}, \varphi_2(t) = t^{p_2}$ ($0 < p_i < \infty$) и $w_i(x_i) \equiv 1$ ($i = 1, 2$), то из теорем 1 и 2 следует теорема А.

3. Вспомогательные утверждения. Пусть

$$B_0^1(x) = \frac{1}{2}; B_n^1(x) = \frac{1}{2} + \sum_{m=0}^n \cos mx \text{ для } n \geq 1;$$

$$B_n^k(x) = \sum_{m=0}^n B_m^{k-1}(x) \text{ для } k = 2, 3, \dots \text{ и } n = 0, 1, 2, \dots;$$

$$\overline{B}_n^1(x) = \sum_{m=1}^n \sin(mx) \text{ для } n = 1, 2, \dots;$$

$$\overline{B}_n^k(x) = \sum_{m=1}^n \overline{B}_m^{k-1}(x) \text{ для } k = 2, 3, \dots \text{ и } n = 1, 2, \dots$$

Заметим, что $B_n^1(x)$ — это ядро Дирихле $D_n(x)$, $\overline{B}_n^1(x)$ — сопряженное ядро Дирихле $\overline{D}_n(x)$, $B_n^2(x)$ — ядро Фейера, умноженное на $n + 1$.

Рассмотрим также следующие ряды:

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \Delta_{k_1 k_2} a_{n_1 n_2} \overline{B}_{n_1}^{k_1}(x_1) \overline{B}_{n_2}^{k_2}(x_2), \quad (17)$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=1}^{\infty} \Delta_{k_1 k_2} a_{n_1 n_2} \overline{B}_{n_1}^{k_1}(x_1) B_{n_2}^{k_2}(x_2), \quad (18)$$

$$\sum_{n_2=1}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \Delta_{k_1 k_2} a_{n_1 n_2} B_{n_1}^{k_1}(x_1) \overline{B}_{n_2}^{k_2}(x_2), \quad (19)$$

$$\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \Delta_{k_1 k_2} a_{n_1 n_2} B_{n_1}^{k_1}(x_1) B_{n_2}^{k_2}(x_2). \quad (20)$$

Лемма 1 [2]. Если последовательность $\{a_{n_1 n_2}\}$ удовлетворяет условию (5) и $\Delta_{k_1 k_2} a_{n_1 n_2} \geq 0$ для любых n_1 и n_2 и некоторых $k_1 \geq 1$ и $k_2 \geq 1$, то

а) каждый из рядов (1)–(4) сходится по Прингсхейму всюду, кроме, может быть, множества плоской меры нуль, т.е. существуют функции $f_{11}(x_1, x_2)$, $f_{12}(x_1, x_2)$, $f_{21}(x_1, x_2)$, $f_{22}(x_1, x_2)$ — суммы соответствующих рядов (1), (2), (3), (4);

б) каждый из рядов (17)–(20) сходится по Прингсхейму всюду, кроме, может быть, множества плоской меры нуль, к функциям $f_{11}(x_1, x_2)$, $f_{12}(x_1, x_2)$, $f_{21}(x_1, x_2)$, $f_{22}(x_1, x_2)$ соответственно.

Лемма 2 [4]. Пусть $a_n \geq 0, b_n \geq 0, n = 1, 2, \dots, \varphi$ — неотрицательная, почти возрастающая на $(0, +\infty)$ функция, такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(2x) \leq C\varphi(x)$ для любых $x \in (0, +\infty)$, где положительная постоянная C не зависит от x и $0 < p = \log_2 C$. Тогда

1) для любых $0 < x < y < \infty$ справедливо неравенство $\varphi(x)/x^p \geq C_1\varphi(y)/y^p$, где C_1 не зависит от x, y ;

2) $\varphi(x + y) \leq C_2(\varphi(x) + \varphi(y))$ для любых $x \geq 0, y \geq 0$, где C_2 не зависит от x, y ;

3) если $\sum_{m=n}^{\infty} a_m \leq C_3 a_n, n = 1, 2, \dots$, где C_3 не зависит от n , то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi\left(\sum_{m=1}^k b_m\right) \leq C_4 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \varphi(b_m), \text{ где } C_4 \text{ не зависит от } \{b_n\};$$

4) если $\sum_{m=1}^n a_m \leq C_5 a_n, n = 1, 2, \dots$, где C_5 не зависит от n , то

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi\left(\sum_{m=k}^{\infty} b_m\right) \leq C_6 \sum_{m=1}^{\infty} a_m \varphi(b_m), \text{ где } C_6 \text{ не зависит от } \{b_n\}.$$

Лемма 3. Пусть $a_n > 0, n = 1, 2, \dots, \varphi$ — неотрицательная, почти возрастающая на $(0, +\infty)$ функция, такая, что $\varphi(0) = 0$ и $\varphi(2x) \leq 2\varphi(x)$ для любых $x \in (0, +\infty)$. Тогда для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\varphi\left(\sum_{m=1}^k a_m\right) \leq C \sum_{m=1}^k \varphi(a_m),$$

где C не зависит от k и $\{a_n\}$.

Доказательство. Пусть $x = a_m$ ($m = 1, \dots, k$), $y = \sum_{m=1}^k a_m$. Тогда $0 < x < y < \infty$. Применяя п. 1 леммы 2, получим

$$\frac{\varphi(a_m)}{a_m} \geq C_1 \frac{\varphi\left(\sum_{m=1}^k a_m\right)}{\sum_{m=1}^k a_m},$$

где C_1 не зависит от a_m и сумм $\sum_{m=1}^k a_m$ для любого k и $m = 1, \dots, k$. Тогда для любого $m = 1, \dots, k$

$$\varphi(a_m) \sum_{m=1}^k a_m \geq C_1 a_m \varphi\left(\sum_{m=1}^k a_m\right).$$

Суммируя эти неравенства, получим

$$C_1 \varphi\left(\sum_{m=1}^k a_m\right) \leq \sum_{m=1}^k \varphi(a_m),$$

откуда и следует лемма 3.

4. Доказательство теоремы 1. По лемме 1 почти всюду справедливо равенство

$$F(x_1, x_2) = \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \Delta_{l_1, l_2} a_{n_1, n_2} \tilde{B}_{n_1}^{l_1}(x_1) \tilde{B}_{n_2}^{l_2}(x_2),$$

где в случае $l_1 = 1, l_2 = 1$

$$F(x_1, x_2) = f_{11}(x_1, x_2), \tilde{B}_{n_1}^{l_1}(x_1) = \bar{B}_{n_1}^1(x_1), \tilde{B}_{n_2}^{l_2}(x_2) = \bar{B}_{n_2}^1(x_2),$$

$\Delta_{11}a_{n_1 0} = a_{n_1, 0} = 0$ для $n_1 = 0, 1, 2, \dots$, $\Delta_{11}a_{0n_2} = a_{0n_2} = 0$ для $n_2 = 0, 1, 2, \dots$;
 в случае $l_1 = 1, l_2 = 2$

$$F(x_1, x_2) = f_{12}(x_1, x_2), \tilde{B}_{n_1}^{l_1}(x_1) = \bar{B}_{n_1}^1(x_1), \tilde{B}_{n_2}^{l_2}(x_2) = B_{n_2}^2(x_2),$$

$$\Delta_{12}a_{0n_2} = \Delta_{01}a_{0n_2} = 0 \text{ для } n_2 = 0, 1, 2, \dots;$$

в случае $l_1 = 2, l_2 = 1$

$$F(x_1, x_2) = f_{21}(x_1, x_2), \tilde{B}_{n_1}^{l_1}(x_1) = B_{n_1}^2(x_1), \tilde{B}_{n_2}^{l_2}(x_2) = \bar{B}_{n_2}^1(x_2),$$

$$\Delta_{21}a_{n_1 0} = \Delta_{10}a_{n_1 0} = 0 \text{ для } n_1 = 0, 1, 2, \dots;$$

в случае $l_1 = 2, l_2 = 2$

$$F(x_1, x_2) = f_{22}(x_1, x_2), \tilde{B}_{n_1}^{l_1}(x_1) = B_{n_1}^2(x_1), \tilde{B}_{n_2}^{l_2}(x_2) = B_{n_2}^2(x_2).$$

Оценим $I = \int_0^{2\pi} w_2(x_2) \varphi_2 \left(\int_0^{2\pi} w_1(x_1) \varphi_1(|F(x_1, x_2)|) dx_1 \right) dx_2$. Нетрудно проверить, что

$$I = \int_0^{\pi} \tilde{w}_2(x_2) \varphi_2 \left(\int_0^{\pi} \tilde{w}_1(x_1) \varphi_1(|F(x_1, x_2)|) dx_1 \right) dx_2.$$

Применяя п. 2 леммы 2, получим

$$\begin{aligned} I \leq C & \left(\sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) \varphi_1 \left(\left| \sum_{n_2=0}^{2^{m_2+1}-1} \sum_{n_1=0}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1 l_2} a_{n_1 n_2} \tilde{B}_{n_1}^{l_1}(x_1) \times \right. \right. \right. \right. \\ & \times \tilde{B}_{n_2}^{l_2}(x_2) \left. \left. \left. \right) dx_1 \right) dx_2 + \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) \varphi_1 \left(\left| \sum_{n_2=0}^{2^{m_2+1}-1} \sum_{n_1=2^{m_1+1}}^{\infty} \Delta_{l_1 l_2} a_{n_1 n_2} \times \right. \right. \right. \right. \\ & \times \tilde{B}_{n_1}^{l_1}(x_1) \tilde{B}_{n_2}^{l_2}(x_2) \left. \left. \left. \right) dx_1 \right) dx_2 + \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) \times \right. \right. \\ & \times \varphi_1 \left(\left| \sum_{n_2=2^{m_2+1}}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1 l_2} a_{n_1 n_2} \tilde{B}_{n_1}^{l_1}(x_1) \tilde{B}_{n_2}^{l_2}(x_2) \right| \right) dx_1 \right) dx_2 + \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) \times \\ & \times \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) \varphi_1 \left(\left| \sum_{n_2=2^{m_2+1}}^{\infty} \sum_{n_1=2^{m_1+1}}^{\infty} \Delta_{l_1 l_2} a_{n_1 n_2} \tilde{B}_{n_1}^{l_1}(x_1) \tilde{B}_{n_2}^{l_2}(x_2) \right| \right) dx_1 \right) dx_2 \right) = \\ & = C(I_1 + I_2 + I_3 + I_4), \end{aligned}$$

где C не зависит от $\{a_{n_1 n_2}\}$.

Оценим сверху I_1 . Так как $|\tilde{B}_{n_1}^{l_1}(x_1)| \leq C_1(n_1 + 1)^{l_1}$, $|\tilde{B}_{n_2}^{l_2}(x_2)| \leq C_1(n_2 + 1)^{l_2}$, где C_1 не зависит от n_1 и n_2 , то

$$I_1 \leq C_2 \left(\sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) \varphi_1 \left(\sum_{n_2=0}^{2^{m_2+1}-1} \sum_{n_1=0}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1 l_2} a_{n_1 n_2} (n_1+1)^{l_1} (n_2+1)^{l_2} \right) dx_1 \right) dx_2 \right).$$

Ввиду того что $\Delta_{l_1 l_2} a_{n_1 n_2} = \Delta_{l_1-1, l_2} a_{n_1 n_2} - \Delta_{l_1-1, l_2} a_{n_1+1, n_2}$ и $\Delta_{l_1-1, l_2} a_{n_1 n_2} \geq 0$, получим

$$\begin{aligned} I_1 \leq C_3 & \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{n_2=0}^{2^{m_2+1}-1} \sum_{n_1=0}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{n_1 n_2} \times \right. \right. \\ & \left. \left. \times (n_1 + 1)^{l_1-1} (n_2 + 1)^{l_2-1} \right) \right). \end{aligned}$$

Обозначим $b_{n_1} = \sum_{n_2=0}^{2^{m_2+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{n_1 n_2} (n_2 + 1)^{l_2-1}$ и рассмотрим

$$\begin{aligned} I_1^* &= \sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{n_1=0}^{2^{m_1+1}-1} b_{n_1} (n_1 + 1)^{l_1-1} \right) \leq \\ &\leq C_4 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1(b_0) + \sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{n_1=1}^{2^{m_1+1}-1} b_{n_1} (n_1 + 1)^{l_1-1} \right) \right) = \\ &= C_4 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1(b_0) + \sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{s_1=0}^{m_1} \sum_{n_1=2^{s_1}}^{2^{s_1+1}-1} b_{n_1} (n_1 + 1)^{l_1-1} \right) \right) = \\ &= C_4 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1(b_0) + \sum_{m_1=0}^{\infty} t_{m_1} \varphi_1 \left(\sum_{s_1=0}^{m_1} h_{s_1} \right) \right). \end{aligned}$$

Учитывая свойство (7) для $\tilde{w}_1(x_1)$ и применяя п. 3 леммы 2, находим

$$I_1^* \leq C_5 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1(b_0) + \sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{n_1=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} b_{n_1} (n_1 + 1)^{l_1-1} \right) \right).$$

Теперь имеем

$$\begin{aligned} I_1 &\leq C_6 \left(\int_0^{\pi} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\int_0^{\pi} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{00} \right) \right) + \right. \\ &+ \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{s_2=0}^{m_2} \sum_{n_2=2^{s_2}}^{2^{s_2+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{0n_2} \times \right. \right. \\ &\times (n_2 + 1)^{l_2-1} \left. \left. \right) \right) + \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{n_1=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{n_1 0} \times \right. \right. \\ &\times (n_1 + 1)^{l_1-1} \left. \left. \right) \right) + \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \times \right. \\ &\times \varphi_1 \left(\sum_{s_2=0}^{m_2} \sum_{n_2=2^{s_2}}^{2^{s_2+1}-1} \sum_{n_1=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{n_1 n_2} (n_2 + 1)^{l_2-1} (n_1 + 1)^{l_1-1} \right) \left. \right). \end{aligned}$$

Пусть $\varphi_1(2x) \leq C_7 \varphi_1(x)$, и, не ограничивая общности, считаем, что $1 < p_1 = \log_2 C_7$ (если же окажется, что $p_1 = \log_2 C_7 \leq 1$, то возьмем константу C_8 , такую, что $C_7 < C_8$ и $1 < p_1 = \log_2 C_8$; для этой константы будем иметь $\varphi_1(2x) \leq C_8 \varphi_1(x)$ и $1 < p_1 = \log_2 C_8$). Тогда

$$I_1 \leq C_9 \left(\int_0^{\pi} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\int_0^{\pi} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{00} \right) \right) + \right.$$

$$\begin{aligned} & \times (n_1 + 1)^{l_1 - 1}) + \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\left[\left\{ \sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times \left\{ \sum_{s_2=0}^{m_2} \left[\varphi_1 \left(\sum_{n_2=2^{s_2}}^{2^{s_2+1}-1} \sum_{n_1=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{n_1 n_2} (n_2 + 1)^{l_2-1} (n_1 + 1)^{l_1-1} \right) \right]^{\frac{1}{p_1}} \right\}^{p_1} \right]^{\frac{1}{p_1}} \right)^{p_1} \right). \end{aligned}$$

Так как $p_1 > 1$, то, используя неравенство Минковского, будем иметь

$$\begin{aligned} I_1 & \leq C_{10} \left(\int_0^{\pi} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\int_0^{\pi} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{00} \right) \right) + \right. \\ & + \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\left[\sum_{s_2=0}^{m_2} \left\{ \sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{n_2=2^{s_2}}^{2^{s_2+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{0n_2} \times \right. \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times (n_2 + 1)^{l_2-1} \right\}^{\frac{1}{p_1}} \right]^{p_1} \right) + \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{n_1=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{n_1 0} \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times (n_1 + 1)^{l_1-1} \right) \right) + \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\left[\sum_{s_2=0}^{m_2} \left\{ \sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times \varphi_1 \left(\sum_{n_2=2^{s_2}}^{2^{s_2+1}-1} \sum_{n_1=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{n_1 n_2} (n_2 + 1)^{l_2-1} (n_1 + 1)^{l_1-1} \right) \right\}^{\frac{1}{p_1}} \right]^{p_1} \right) \right) = \\ & = C_{10} \left(\int_0^{\pi} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\int_0^{\pi} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{00} \right) \right) + \right. \\ & + \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_4 \left(\sum_{s_2=0}^{m_2} \left\{ \sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{n_2=2^{s_2}}^{2^{s_2+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{0n_2} \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times (n_2 + 1)^{l_2-1} \right) \right\}^{\frac{1}{p_1}} \right) + \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{n_1=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{n_1 0} \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times (n_1 + 1)^{l_1-1} \right) \right) + \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_4 \left(\sum_{s_2=0}^{m_2} \left\{ \sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \times \right. \right. \right. \\ & \left. \left. \left. \times \varphi_1 \left(\sum_{n_2=2^{s_2}}^{2^{s_2+1}-1} \sum_{n_1=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{n_1 n_2} (n_2 + 1)^{l_2-1} (n_1 + 1)^{l_1-1} \right) \right\}^{\frac{1}{p_1}} \right) \right), \end{aligned}$$

где $\varphi_4(x) = \varphi_2(x^{p_1})$. Пусть $\varphi_2(2x) \leq C_{11}\varphi_2(x)$, $\varphi_2(x_1) \leq C_{12}\varphi_2(x_2)$ для любых $0 < x_1 < x_2 < \infty$. Заметим, что $\varphi_4(x)$ — почти возрастающая функция, такая, что

$$\varphi_4(2x) = \varphi_2((2x)^{p_1}) = \varphi_2(2^{p_1} x^{p_1}) \leq C_{12} \varphi_2(2^{[p_1]+1} x^{p_1}) \leq C_{12} \cdot C_{11}^{[p_1]+1} \varphi_2(x^{p_1}) = C_{13} \varphi_4(x),$$

и, не ограничивая общности, считаем, что $1 < p_2 = \log_2 C_{13}$ (если же окажется, что $p_2 = \log_2 C_{13} \leq 1$, то возьмем константу C_{14} , такую, что $C_{13} < C_{14}$ и $1 < p_2 = \log_2 C_{14}$; для этой константы будем иметь $\varphi_4(2x) \leq C_{14}\varphi_4(x)$ и $1 < p_2 = \log_2 C_{14}$). Таким образом, функция $\varphi_4(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2. Учитывая свойство (7) для $\tilde{w}_2(x_2)$ и применяя п. 3 леммы 2, будем иметь

$$\begin{aligned}
 I_1 &\leq C_{15} \left(\int_0^\pi \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\int_0^\pi \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{00} \right) \right) + \right. \\
 &+ \sum_{m_2=0}^\infty \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_4 \left(\left\{ \sum_{m_1=0}^\infty \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{n_2=2^{m_2}}^{2^{m_2+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{0n_2} \times \right. \right. \right. \\
 &\times (n_2 + 1)^{l_2-1} \left. \left. \left. \right\}^{\frac{1}{p_1}} \right) + \sum_{m_2=0}^\infty \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^\infty \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{n_1=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{n_1 0} \times \right. \right. \right. \\
 &\times (n_1 + 1)^{l_1-1} \left. \left. \left. \right) \right) + \sum_{m_2=0}^\infty \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_4 \left(\left\{ \sum_{m_1=0}^\infty \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \times \right. \right. \\
 &\times \varphi_1 \left(\sum_{n_2=2^{m_2}}^{2^{m_2+1}-1} \sum_{n_1=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{n_1 n_2} (n_2 + 1)^{l_2-1} (n_1 + 1)^{l_1-1} \right) \left. \left. \right\}^{\frac{1}{p_1}} \right) \right) = \\
 &= C_{15} \left(\int_0^\pi \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\int_0^\pi \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{00} \right) \right) + \right. \\
 &+ \sum_{m_2=0}^\infty \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^\infty \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{n_2=2^{m_2}}^{2^{m_2+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{0n_2} \times \right. \right. \\
 &\times (n_2 + 1)^{l_2-1} \left. \left. \right) \right) + \sum_{m_2=0}^\infty \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^\infty \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{n_1=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{n_1 0} \times \right. \right. \\
 &\times (n_1 + 1)^{l_1-1} \left. \left. \right) \right) + \sum_{m_2=0}^\infty \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^\infty \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \times \right. \\
 &\times \varphi_1 \left(\sum_{n_2=2^{m_2}}^{2^{m_2+1}-1} \sum_{n_1=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{n_1 n_2} (n_2 + 1)^{l_2-1} (n_1 + 1)^{l_1-1} \right) \left. \right) = C_{15} \cdot A.
 \end{aligned}$$

Аналогично (с тем лишь изменением, что при оценке бесконечных сумм будем пользоваться неравенствами $\tilde{B}_{n_1}^{l_1}(x_1) \leq \frac{C_{16}}{x_1}$, $\tilde{B}_{n_2}^{l_2}(x_2) \leq \frac{C_{16}}{x_2}$, где C_{16} не зависит ни от n_1 , ни от n_2 , ни от x_1 , ни от x_2) можно показать, что $I_2 \leq C_{17} \cdot A$, $I_3 \leq C_{18} \cdot A$, $I_4 \leq C_{19} \cdot A$, где C_{17}, C_{18}, C_{19} не зависят от $\{a_{n_1, n_2}\}$. Объединяя оценки для I_1, I_2, I_3, I_4 , получим

$$I \leq C_{20} \left(\int_0^\pi \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\int_0^\pi \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{00} \right) \right) + \right.$$

$$\begin{aligned}
 & + \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{n_2=2^{m_2}}^{2^{m_2+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{0n_2} \times \right. \right. \\
 & \times (n_2 + 1)^{l_2-1} \left. \left. \right) \right) + \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left(\sum_{n_1=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{n_1 0} \times \right. \right. \\
 & \times (n_1 + 1)^{l_1-1} \left. \left. \right) \right) + \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \times \right. \\
 & \left. \left. \times \varphi_1 \left(\sum_{n_2=2^{m_2}}^{2^{m_2+1}-1} \sum_{n_1=2^{m_1}}^{2^{m_1+1}-1} \Delta_{l_1-1, l_2-1} a_{n_1 n_2} (n_2 + 1)^{l_2-1} (n_1 + 1)^{l_1-1} \right) \right) \right),
 \end{aligned}$$

где положительная постоянная C_{20} не зависит от последовательности $\{a_{n_1 n_2}\}$.

Подставляя вместо l_1 и l_2 либо 1, либо 2 и учитывая свойства функций $w_i(x_i)$ ($i = 1, 2$) и последовательности $\{a_{n_1 n_2}\}$, получаем оценки сверху (8)–(11) в теореме 1.

5. Доказательство теоремы 2. Докажем сначала неравенство (16). Из условия п. г теоремы 2 следует, что $\Delta_{22} a_{n_1 n_2} \geq 0$ для всех n_1, n_2 . Применяя лемму 1, имеем

$$f_{22}(x_1, x_2) = \sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \Delta_{11} b_{n_1 n_2} B_{n_1}^2(x_1) B_{n_2}^2(x_2),$$

где $B_{n_1}^2(x_1) = \left(\frac{\sin \frac{(n_1+1)x_1}{2}}{2 \sin \frac{x_1}{2}}\right)^2$, $B_{n_2}^2(x_2) = \left(\frac{\sin \frac{(n_2+1)x_2}{2}}{2 \sin \frac{x_2}{2}}\right)^2$, $b_{n_1 n_2} = \Delta_{11} a_{n_1 n_2}$. Тогда

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^{2\pi} w_2(x_2) \varphi_2 \left(\int_0^{2\pi} w_1(x_1) \varphi_1 (|f_{22}(x_1, x_2)|) dx_1 \right) dx_2 = \\
 &= \int_0^{\pi} \tilde{w}_2(x_2) \varphi_2 \left(\int_0^{\pi} \tilde{w}_1(x_1) \varphi_1 (|f_{22}(x_1, x_2)|) dx_1 \right) dx_2 = \\
 &= \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) \varphi_1 \left(\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \Delta_{11} b_{n_1 n_2} B_{n_1}^2(x_1) B_{n_2}^2(x_2) \right) dx_1 \right) dx_2 \geq \\
 &\geq C \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{\nu_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{\nu_2}}} \tilde{w}_2(x_2) \varphi_2 \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{\nu_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{\nu_1}}} \tilde{w}_1(x_1) \varphi_1 \left(\Phi_{\nu_1 \nu_2}(x_1, x_2) \right) dx_1 \right) dx_2,
 \end{aligned}$$

где $\Phi_{\nu_1 \nu_2}(x_1, x_2) = \sum_{n_2=[2^{\nu_2-1}]}^{\infty} \sum_{n_1=[2^{\nu_1-1}]}^{\infty} \Delta_{11} b_{n_1 n_2} B_{n_1}^2(x_1) B_{n_2}^2(x_2)$.

Так как $(x_1, x_2) \in [\frac{\pi}{2^{\nu_1+1}}, \frac{\pi}{2^{\nu_1}}] \times [\frac{\pi}{2^{\nu_2+1}}, \frac{\pi}{2^{\nu_2}}] = I_{\nu_1} \times I_{\nu_2}$, то

$$\Phi_{\nu_1\nu_2}(x_1, x_2) \leq C_1 2^{2\nu_1+2\nu_2} b_{[2^{\nu_1-1}][2^{\nu_2-1}]}.$$
 (21)

Рассмотрим

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{\frac{\pi}{2^{\nu_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{\nu_1}}} \int_{\frac{\pi}{2^{\nu_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{\nu_2}}} \tilde{w}_1(x_1) \tilde{w}_2(x_2) \Phi_{\nu_1\nu_2}(x_1, x_2) dx_1 dx_2 = \\ &= \sum_{n_2=[2^{\nu_2-1}]}^{\infty} \sum_{n_1=[2^{\nu_1-1}]}^{\infty} \Delta_{11} b_{n_1 n_2} \int_{\frac{\pi}{2^{\nu_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{\nu_1}}} \tilde{w}_1(x_1) B_{n_1}^2(x_1) dx_1 \int_{\frac{\pi}{2^{\nu_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{\nu_2}}} \tilde{w}_2(x_2) B_{n_2}^2(x_2) dx_2. \end{aligned}$$

Поскольку $b_i \delta_i = (n_i + 1) \frac{\pi}{2^{\nu_i}} \geq \frac{\pi}{8}$, то, применяя неравенство (12), будем иметь

$$A_1 \geq C_2 2^{2\nu_1+2\nu_2} b_{[2^{\nu_1-1}][2^{\nu_2-1}]} \int_{\frac{\pi}{2^{\nu_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{\nu_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \int_{\frac{\pi}{2^{\nu_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{\nu_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2.$$
 (22)

Обозначим $I_{\nu_i}^0 = \{x_i \in I_{\nu_i} : \tilde{w}_i(x_i) \neq 0\}$ ($i = 1, 2$). Не ограничивая общности, считаем, что $\mu I_{\nu_i}^0 \neq 0$ ($i = 1, 2$). Положим для фиксированных ν_1 и ν_2 и для $x_2 \in I_{\nu_2}^0$

$$J_{\nu_1, \nu_2}(x_2) = \left\{ x_1 \in I_{\nu_1}^0 : \Phi_{\nu_1, \nu_2}(x_1, x_2) \geq \frac{C_2}{\pi^2} 2^{2\nu_1+2\nu_2} b_{[2^{\nu_1-1}][2^{\nu_2-1}]} \right\}$$
 (23)

и

$$J_{\nu_2} = \left\{ x_2 \in I_{\nu_2}^0 : \int_{J_{\nu_1, \nu_2}(x_2)} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \geq \frac{C_2}{\pi^2 C_1} \int_{I_{\nu_1}^0} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \right\}.$$
 (24)

Докажем, что $\int_{J_{\nu_2}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \geq \frac{C_2}{\pi^2 C_1} \int_{I_{\nu_2}^0} \tilde{w}_2(x_2) dx_2$. Предположим противное, т.е.

$$\int_{J_{\nu_2}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 < \frac{C_2}{\pi^2 C_1} \int_{I_{\nu_2}^0} \tilde{w}_2(x_2) dx_2.$$
 (25)

Тогда

$$\begin{aligned} A_1 &= \int_{J_{\nu_2}} \left(\int_{I_{\nu_1}^0} \tilde{w}_1(x_1) \tilde{w}_2(x_2) \Phi_{\nu_1\nu_2}(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 + \int_{I_{\nu_2}^0 \setminus J_{\nu_2}} \left(\int_{J_{\nu_1, \nu_2}} \tilde{w}_1(x_1) \tilde{w}_2(x_2) \Phi_{\nu_1\nu_2}(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 + \\ &+ \int_{I_{\nu_2}^0 \setminus J_{\nu_2}} \left(\int_{I_{\nu_1}^0 \setminus J_{\nu_1, \nu_2}} \tilde{w}_1(x_1) \tilde{w}_2(x_2) \Phi_{\nu_1\nu_2}(x_1, x_2) dx_1 \right) dx_2 = A_2 + A_3 + A_4. \end{aligned}$$

Оценим A_2 . Используя неравенства (21) и (25), заключаем, что

$$A_2 \leq \frac{C_2}{\pi^2} 2^{2\nu_1+2\nu_2} b_{[2^{\nu_1-1}][2^{\nu_2-1}]} \int_{I_{\nu_2}^0} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \int_{I_{\nu_1}^0} \tilde{w}_1(x_1) dx_1.$$

Оценим A_3 . Применяя неравенство (21) и неравенство, обратное к (24) (так как $x_2 \in J_{\nu_2}$), получим

$$A_3 \leq \frac{C_2}{\pi^2} 2^{2\nu_1+2\nu_2} b_{[2^{\nu_1-1}][2^{\nu_2-1}]} \int_{I_{\nu_1}^0} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \int_{I_{\nu_2}^0} \tilde{w}_2(x_2) dx_2.$$

Оценим A_4 . В силу неравенства, обратного к (23) (так как $x_1 \in J_{\nu_1, \nu_2}(x_2)$), будем иметь

$$A_4 \leq \frac{C_2}{\pi^2} 2^{2\nu_1+2\nu_2} b_{[2^{\nu_1-1}][2^{\nu_2-1}]} \int_{I_{\nu_2}^0} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \int_{I_{\nu_1}^0} \tilde{w}_1(x_1) dx_1.$$

Таким образом,

$$A_1 \leq \frac{3}{\pi^2} C_2 2^{2\nu_1+2\nu_2} b_{[2^{\nu_1-1}][2^{\nu_2-1}]} \int_{\frac{\pi}{2^{\nu_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{\nu_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \int_{\frac{\pi}{2^{\nu_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{\nu_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2,$$

что противоречит неравенству (22). Значит,

$$\int_{J_{\nu_2}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \geq \frac{C_2}{\pi^2 C_1} \int_{I_{\nu_2}^0} \tilde{w}_2(x_2) dx_2. \tag{26}$$

Но тогда

$$\begin{aligned} I &= \sum_{m_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_2}}} \tilde{w}_2(x_2) \varphi_2 \left(\sum_{m_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{m_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{m_1}}} \tilde{w}_1(x_1) \varphi_1 \left(\sum_{n_2=0}^{\infty} \sum_{n_1=0}^{\infty} \Delta_{11} b_{n_1 n_2} B_{n_1}^2(x_1) B_{n_2}^2(x_2) \right) dx_1 \right) dx_2 \geq \\ &\geq C_3 \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{\nu_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{\nu_2}}} \tilde{w}_2(x_2) \varphi_2 \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{2^{\nu_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{\nu_1}}} \tilde{w}_1(x_1) \varphi_1 \left(\Phi_{\nu_1 \nu_2}(x_1, x_2) \right) dx_1 \right) dx_2 \geq \\ &\geq C_4 \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{J_{\nu_2}} \tilde{w}_2(x_2) \varphi_2 \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \int_{J_{\nu_1, \nu_2}(x_2)} \tilde{w}_1(x_1) \varphi_1 \left(\Phi_{\nu_1 \nu_2}(x_1, x_2) \right) dx_1 \right) dx_2. \end{aligned}$$

Применяя неравенство (23), будем иметь

$$\begin{aligned} I &\geq C_5 \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{J_{\nu_2}} \tilde{w}_2(x_2) \varphi_2 \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \int_{J_{\nu_1, \nu_2}(x_2)} \tilde{w}_1(x_1) \varphi_1 \left(\frac{C_2}{\pi^2} 2^{2\nu_1+2\nu_2} b_{[2^{\nu_1-1}][2^{\nu_2-1}]} \right) dx_1 \right) dx_2 = \\ &= C_5 \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{J_{\nu_2}} \tilde{w}_2(x_2) \varphi_2 \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \varphi_1 \left(\frac{C_2}{\pi^2} 2^{2\nu_1+2\nu_2} b_{[2^{\nu_1-1}][2^{\nu_2-1}]} \right) \int_{J_{\nu_1, \nu_2}(x_2)} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \right) dx_2. \end{aligned}$$

В силу неравенства (24) получим

$$\begin{aligned} I &\geq C_6 \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{J_{\nu_2}} \tilde{w}_2(x_2) \varphi_2 \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \varphi_1 \left(\frac{C_2}{\pi^2} 2^{2\nu_1+2\nu_2} b_{[2^{\nu_1-1}][2^{\nu_2-1}]} \right) \frac{C_2}{\pi^2 C_1} \int_{I_{\nu_1}^0} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \right) dx_2 = \\ &= C_6 \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \int_{J_{\nu_2}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \varphi_1 \left(\frac{C_2}{\pi^2} 2^{2\nu_1+2\nu_2} b_{[2^{\nu_1-1}][2^{\nu_2-1}]} \right) \frac{C_2}{\pi^2 C_1} \int_{I_{\nu_1}^0} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \right). \end{aligned}$$

Используя неравенство (26), заключаем, что

$$\begin{aligned} I &\geq C_7 \sum_{\nu_2=0}^{\infty} \frac{C_2}{\pi^2 C_1} \int_{\frac{\pi}{2^{\nu_2+1}}}^{\frac{\pi}{2^{\nu_2}}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{\nu_1=0}^{\infty} \varphi_1 \left(\frac{C_2}{\pi^2} 2^{2\nu_1+2\nu_2} b_{[2^{\nu_1-1}][2^{\nu_2-1}]} \right) \frac{C_2}{\pi^2 C_1} \int_{\frac{\pi}{2^{\nu_1+1}}}^{\frac{\pi}{2^{\nu_1}}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \right) \geq \\ &\geq C_8 \sum_{n_2=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_2+2}}^{\frac{\pi}{n_2+1}} \tilde{w}_2(x_2) dx_2 \varphi_2 \left(\sum_{n_1=0}^{\infty} \int_{\frac{\pi}{n_1+2}}^{\frac{\pi}{n_1+1}} \tilde{w}_1(x_1) dx_1 \varphi_1 \left((n_1+1)^2 (n_2+1)^2 \Delta_{11} a_{n_1 n_2} \right) \right), \end{aligned}$$

где положительная постоянная C_8 не зависит от последовательности $\{a_{n_1 n_2}\}$. Таким образом, неравенство (16) доказано. Аналогично доказываются неравенства (13)–(15), только для получения оценок снизу в неравенстве (13) используется, как и в работе [2], вспомогательная функция $\frac{1}{4}(f_{11}(x_1, x_2) + f_{11}(\pi - x_1, x_2) + f_{11}(x_1, \pi - x_2) + f_{11}(\pi - x_1, \pi - x_2))$, при доказательстве неравенства (14) — вспомогательная функция $\frac{1}{2}(f_{12}(x_1, x_2) + f_{12}(\pi - x_1, x_2))$, при доказательстве неравенства (15) — вспомогательная функция $\frac{1}{2}(f_{21}(x_1, x_2) + f_{21}(x_1, \pi - x_2))$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Ч. 1. М.: Физматгиз, 1962.
2. Вуколова Т.М., Дьяченко М.И. Оценки смешанных норм сумм двойных тригонометрических рядов с кратно монотонными коэффициентами // Изв. вузов. Математика. 1997. № 7. 3–13.
3. Бари Н.К., Стечкин С.Б. Наилучшие приближения и дифференциальные свойства двух сопряженных функций // Тр. Моск. мат. о-ва. 1956. Вып. 5. 483–521.
4. Симонов Б.В. О рядах по синусам и косинусам в классах L_φ // Изв. вузов. Математика. 2013. № 10. 24–42.

Поступила в редакцию
20.11.2019

УДК 519.622

О ВЫЧИСЛЕНИИ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ МЕТОДОМ РЯДОВ ЧЕБЫШЁВА И ОЦЕНКА ЕГО ПОГРЕШНОСТИ

О. Б. Арушанян¹, С. Ф. Залеткин²

Рассматривается приближенный метод решения задачи Коши для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка, основанный на применении смещенных рядов Чебышёва и квадратурной формулы Маркова. Приведены способы оценки погрешности приближенного решения, выраженного в виде частичной суммы ряда некоторого порядка, с помощью второго приближенного решения, вычисленного специальным образом и представленного частичной суммой ряда более высокого порядка. На основе предложенных способов оценки погрешности построен алгоритм автоматического разбиения промежутка интегрирования на элементарные сегменты, что позволяет вычислять приближенное решение с наперед заданной точностью.

Ключевые слова: обыкновенные дифференциальные уравнения, приближенные аналитические методы, численные методы, ортогональные разложения, смещенные ряды Чебышёва, квадратурные формулы Маркова, полиномиальная аппроксимация, контроль точности, оценка погрешности, автоматическое управление длиной шага.

An approximate method of solving the Cauchy problem for nonlinear first-order ordinary differential equations is considered. The method is based on using the shifted Chebyshev series and a Markov quadrature formula. Some approaches are given to estimate the error of an approximate solution expressed by a partial sum of a certain order series. The error is estimated using the second approximation of the solution expressed by a partial sum of a higher order series. An algorithm of partitioning the integration interval into elementary subintervals to

¹ Арушанян Олег Багратович — доктор техн. наук, проф., зав. лаб. Научно-исслед. вычисл. центра МГУ, e-mail: arush@srcc.msu.ru.

² Залеткин Сергей Федорович — канд. физ.-мат. наук, ст. науч. сотр. Научно-исслед. вычисл. центра МГУ, e-mail: iraz@srcc.msu.ru.

Arushanyan Oleg Bagratovich — Doctor of Technical Sciences, Professor, Head of Laboratory, Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center.

Zaletkin Sergei Fedorovich — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Senior Researcher, Lomonosov Moscow State University, Research Computing Center.

ensure the computation of the solution with a prescribed accuracy is discussed on the basis of the proposed approaches to error estimation.

Key words: ordinary differential equations, approximate analytical methods, numerical methods, orthogonal expansions, shifted Chebyshev series, Markov quadrature formulas, polynomial approximation, accuracy control, error estimate, automatic step size control.

Введение. Решается задача Коши для системы M нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$y' = f(x, y), \quad y(x_0) = y_0, \quad x_0 \leq x \leq x_0 + X = x_f, \quad (1)$$

при условии, что функция $f(x, y)$ имеет в области определения системы непрерывные ограниченные частные производные по переменным x, y . Предполагается, что на отрезке $[x_0, x_f]$ задача (1) имеет единственное решение. Тогда это решение и его производная

$$y'(x_0 + \alpha X) = f(x_0 + \alpha X, y(x_0 + \alpha X)) = \Phi(\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

разлагаются на промежутке интегрирования $[x_0, x_f]$ в равномерно сходящиеся ряды по смещенным многочленам Чебышёва первого рода

$$y(x_0 + \alpha X) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^*[y] T_i^*(\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad a_i^*[y] = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{y(x_0 + \alpha X) T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} d\alpha; \quad (2)$$

$$\Phi(\alpha) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i^*[\Phi] T_i^*(\alpha), \quad 0 \leq \alpha \leq 1, \quad a_i^*[\Phi] = \frac{2}{\pi} \int_0^1 \frac{\Phi(\alpha) T_i^*(\alpha)}{\sqrt{\alpha(1-\alpha)}} d\alpha. \quad (3)$$

Здесь штрих у знака суммы означает, что слагаемое с индексом 0 берется с дополнительным множителем $1/2$; $T_i^*(\alpha)$ — смещенный многочлен Чебышёва первого рода на $[0, 1]$: $T_i^*(\alpha) = T_i(2\alpha - 1)$, $T_i(t)$ — многочлен Чебышёва первого рода на $[-1, 1]$.

Если ряды (2), (3) быстро сходятся на всем интервале интегрирования $[x_0, x_f]$, то такие ряды удобно использовать на практике для фактического вычисления их сумм, непосредственно заменяя бесконечные суммы частичными суммами некоторого порядка и принимая последние в качестве приближенного аналитического представления решения задачи (1) и его производной. В противном случае, т.е. когда сходимость этих рядов на всем интервале интегрирования медленная, получение аналитического решения задачи в виде одной частичной суммы на всем отрезке $[x_0, x_f]$ может быть затруднено. В этом случае можно поступить таким образом. Следует разбить интервал интегрирования $[x_0, x_f]$ на элементарные (частичные) сегменты $[x_s, x_s + h]$, $s = 0, 1, \dots, 0 < h \leq X$, так, чтобы на каждом таком элементарном сегменте соответствующие ряды Чебышёва (2), (3) быстро сходились. Чем меньше длина h элементарного сегмента, тем быстрее стремится к нулю на этом сегменте остаточный член r_k ряда Чебышёва при $k \rightarrow \infty$.

В [1–5] нами предложен и подробно описан приближенный метод решения задачи (1) с помощью данных рядов Чебышёва. Сущность метода состоит в следующем. Замена рядов для $f(x, y(x))$ и $y(x)$ на элементарных сегментах их частичными суммами k -го и $(k + 1)$ -го порядков соответственно

$$\Phi(\alpha) = f(x_s + \alpha h, y(x_s + \alpha h)) \approx \sum_{i=0}^k a_i^*[\Phi] T_i^*(\alpha), \quad y(x_s + \alpha h) \approx \sum_{i=0}^{k+1} a_i^*[y] T_i^*(\alpha),$$

применение формулы численного интегрирования Маркова [5] для вычисления интегралов $a_i^*[\Phi]$ в (3), а также использование связи между коэффициентами Чебышёва $a_i^*[y]$ решения $y(x)$ и коэффициентами Чебышёва $a_i^*[\Phi]$ его производной $\Phi(\alpha)$ приводят к системе конечных уравнений для приближенных значений коэффициентов Чебышёва правой части $f(x, y(x))$, которая решается методом последовательных приближений. Вместе с решением этой системы определяются также приближенные коэффициенты Чебышёва $a_i^*[y]$ функции $y(x)$.

Цель же настоящей работы заключается в том, чтобы оценить погрешность полученного в виде частичной суммы приближенного решения $y(x)$ на одном элементарном сегменте длиной h и по этой оценке погрешности выбрать такую длину h^* элементарного сегмента, чтобы найти на нем приближенное решение также в виде частичной суммы смещенного ряда Чебышёва, удовлетворяющее наперед заданной точности.

1. Оценка погрешности приближенного решения. Рассмотрим первый элементарный сегмент $[x_0, x_0 + h]$, где $h \leq X$. Пусть на этом сегменте приближенное решение

$$U_{k+1}(x) = U_{k+1}(x_0 + \alpha h) \approx y(x_0 + \alpha h), \quad 0 \leq \alpha \leq 1,$$

задачи Коши (1) представляется в виде $(k+1)$ -й частичной суммы смещенного ряда Чебышёва при $k = k_1$:

$$U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h) = \sum_{i=0}^{k_1+1} ' a_i^* [U_{k_1+1}] T_i^*(\alpha)$$

и имеет порядок точности $O(h^{k_1+2})$ относительно h при $h \rightarrow 0$. Допустим, что на этом же сегменте рассматривается еще одно приближенное решение, которое также представляется в виде $(k+1)$ -й частичной суммы смещенного ряда Чебышёва при $k = k_2$, причем $k_2 > k_1$:

$$U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h) = \sum_{i=0}^{k_2+1} ' a_i^* [U_{k_2+1}] T_i^*(\alpha),$$

и которое имеет порядок точности $O(h^{k_2+2})$ относительно h при $h \rightarrow 0$. Таким образом, справедливы следующие равенства:

$$y(x_0 + \alpha h) - U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h) = O(h^{k_1+2}), \quad y(x_0 + \alpha h) - U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h) = O(h^{k_2+2}).$$

Отсюда следует, что погрешность приближенного решения $U_{k_1+1}(x)$ на элементарном сегменте $[x_0, x_0 + h]$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} y(x_0 + \alpha h) - U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h) &= U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h) - U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h) + O(h^{k_2+2}) = \\ &= \sum_{i=0}^{k_1+1} ' (a_i^* [U_{k_2+1}] - a_i^* [U_{k_1+1}]) T_i^*(\alpha) + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} a_i^* [U_{k_2+1}] T_i^*(\alpha) + O(h^{k_2+2}). \end{aligned}$$

Отбрасывая остаточный член $O(h^{k_2+2})$, получаем оценку погрешности на сегменте $[x_0, x_0 + h]$

$$y(x_0 + \alpha h) - U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h) \approx \sum_{i=0}^{k_1+1} ' (a_i^* [U_{k_2+1}] - a_i^* [U_{k_1+1}]) T_i^*(\alpha) + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} a_i^* [U_{k_2+1}] T_i^*(\alpha). \quad (4)$$

В частности, в конце элементарного сегмента, т.е. для значения решения в точке $x_0 + h$, погрешность приближенного решения можно оценить величиной

$$\begin{aligned} y(x_0 + h) - U_{k_1+1}(x_0 + h) &\approx U_{k_2+1}(x_0 + h) - U_{k_1+1}(x_0 + h) = \\ &= \sum_{i=0}^{k_1+1} ' (a_i^* [U_{k_2+1}] - a_i^* [U_{k_1+1}]) + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} a_i^* [U_{k_2+1}]. \end{aligned} \quad (5)$$

Из (4) следует еще одна оценка погрешности для l -й компоненты приближенного решения $U_{k_1+1}(x)$ на сегменте $[x_0, x_0 + h]$:

$$|y^l(x_0 + \alpha h) - U_{k_1+1}^l(x_0 + \alpha h)| \leq \sum_{i=0}^{k_1+1} ' |a_i^{*l} [U_{k_2+1}] - a_i^{*l} [U_{k_1+1}]| + \sum_{i=k_1+2}^{k_2+1} |a_i^{*l} [U_{k_2+1}]|. \quad (6)$$

Мы предполагаем, что правые части дифференциальных уравнений (1) имеют столько непрерывных частных производных, сколько это необходимо для того, чтобы были справедливы приводимые здесь оценки погрешности.

Опуская подробное определение оценивающего решения, отметим только, что решение $U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h)$ вычисляется в результате выполнения указанного во введении итерационного процесса, начальным приближением в котором является решение $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$.

2. Автоматическое разбиение промежутка интегрирования на элементарные сегменты. Имея в распоряжении способы (5), (6) оценки погрешности приближенного решения на одном элементарном сегменте, величину элементарного (частичного) сегмента можно выбирать автоматически в процессе счета. При этом можно исходить из того, что на каждый элементарный сегмент $[x_s, x_s + h]$ приходится приблизительно одинаковая погрешность ε .

Обозначим величину погрешности для l -й компоненты приближенного решения $U_{k_1+1}^l$, определяемую по формуле (5) или (6), через E^l , $l = 1, \dots, M$. Если для всех компонент решения, которые требуется проверять на точность, выполняется неравенство $|E^l| \leq \varepsilon$ (или $\|E\|_\infty \leq \varepsilon$), то считается, что полученная частичная сумма $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, удовлетворяет на элементарном сегменте $[x_0, x_0 + h]$ заданной точности ε , и она принимается в качестве приближенного решения задачи Коши (1) на данном элементарном сегменте. Вместо коэффициентов $a_i^*[U_{k_1+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k_1 + 1$, можно взять коэффициенты $a_i^*[U_{k_2+1}]$, $i = 0, 1, \dots, k_1 + 1$, частичной суммы $U_{k_2+1}(x_0 + \alpha h)$, $0 \leq \alpha \leq 1$, поскольку последние имеют более высокий порядок точности относительно h , чем коэффициенты $a_i^*[U_{k_1+1}]$. Тогда в качестве приближенного решения на сегменте $[x_0, x_0 + h]$ берется следующая сумма:

$$S_{k_1+1}(x_0 + \alpha h) = \sum_{i=0}^{k_1+1} ' a_i^*[U_{k_2+1}] T_i^*(\alpha),$$

которая по-прежнему будет иметь тот же порядок точности $O(h^{k_1+2})$, что и $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$. В качестве приближения в конце элементарного сегмента $[x_0, x_0 + h]$, т.е. в точке $x_1 = x_0 + h$, можно также взять значение этой суммы $S_{k_1+1}(x_0 + h)$ в точке x_1 либо значение $U_{k_2+1}(x_0 + h)$ как имеющее более высокий порядок точности $O(h^{k_2+2})$, чем приближенное решение $U_{k_1+1}(x_0 + h)$ или $S_{k_1+1}(x_0 + h)$. Поскольку погрешность E имеет порядок $O(h^{k_1+2})$, то справедливо представление $E = ch^{k_1+2}$, где $c = \text{const}$. Длина следующего элементарного сегмента $[x_1, x_1 + h_\varepsilon]$ определяется с помощью соотношения

$$h_\varepsilon = \xi h, \tag{7}$$

где ξ находится из условия выполнения равенства $\|ch_\varepsilon^{k_1+2}\|_\infty = \varepsilon$ или $\|c\xi^{k_1+2}h^{k_1+2}\|_\infty = \varepsilon$. Отсюда получаем

$$\xi = \sqrt[k_1+2]{\frac{\varepsilon}{\|E\|_\infty}}. \tag{8}$$

Здесь $\xi \geq 1$ и значение длины следующего элементарного сегмента $[x_1, x_1 + h_\varepsilon]$ больше длины предыдущего элементарного сегмента $[x_0, x_0 + h]$.

Если оценка погрешности приближенного решения $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$ превосходит наперед заданную границу ε : $\|E\|_\infty > \varepsilon$, то считается, что на данном сегменте $[x_0, x_0 + h]$ приближенное решение $U_{k_1+1}(x_0 + \alpha h)$ не достигает требуемой точности. В этом случае выбирается новая длина элементарного сегмента $[x_0, x_0 + h_\varepsilon]$ по формулам (7), (8). Теперь $\xi < 1$ и новая длина элементарного сегмента $[x_0, x_0 + h_\varepsilon]$ меньше предыдущей.

В действительности берется несколько меньшее, чем (8), значение ξ , например $\xi^* = 0,9\xi$, и соответственно меньшее, чем (7), значение длины элементарного сегмента $h_\varepsilon^* = \xi^*h$. Это делается с целью исключения тех элементарных сегментов, на которых не достигается требуемая точность.

3. Пример. Решить задачу Коши для нелинейного дифференциального уравнения

$$y' = \frac{y \ln y}{1+x}, \quad y(0) = e^q, \quad 0 \leq x \leq x_f, \quad x_f = 7, \quad q = 4. \tag{9}$$

Решением задачи является быстрорастущая функция с большой производной $y(x) = e^{q(1+x)}$. Уравнение (9) интегрировалось при нескольких значениях наперед заданной точности. Разбиение интервала интегрирования на элементарные сегменты заранее не задавалось, а автоматически строилось в процессе интегрирования этого уравнения. Задавалась только длина начального (первого) элементарного сегмента, равная 1. Приближенное решение представлялось на элементарных сегментах в виде $(k+1)$ -й частичной суммы смещенного ряда Чебышёва при $k = k_1 = 18$, а оценивающее решение — в виде частичной суммы при $k = k_2 = 25$. Все данные, относящиеся к интегрированию задачи (9), а именно: наперед заданная относительная точность ε , с которой требовалось вычислить решение; фактически полученная относительная погрешность δ вычисленного приближенного решения в конце интервала интегрирования x_f ; число элементарных сегментов N_h , на которые автоматически разбивался промежуток интегрирования $[0, x_f]$ в процессе счета; количество N_f вычислений правой части дифференциального уравнения (9) — все эти сведения приведены в табл. 1.

Т а б л и ц а 1

N	ε	δ	N_h	N_f
1	$0,5 \times 10^{-11}$	$-0,99 \times 10^{-13}$	6	3996
2	$0,5 \times 10^{-12}$	$0,32 \times 10^{-13}$	6	3996
3	$0,5 \times 10^{-13}$	$-0,12 \times 10^{-14}$	7	4662
4	$0,5 \times 10^{-14}$	$0,69 \times 10^{-14}$	9	5994
5	$0,5 \times 10^{-11}$	$-0,28 \times 10^{-14}$	7	4662

Сведения, представленные в первых четырех строках таблицы, относятся к случаю, когда погрешность приближенного решения определяется с помощью оценки (5). Указанные в пятой строке

данные соответствуют тому случаю, когда для нахождения погрешности приближенного решения применяется оценка (6). Из сравнения первой и пятой строк видно, что использование второй оценки приводит к уменьшению погрешности приближенного решения.

Т а б л и ц а 2

Метод	δ	N_h	N_f
Фельберга	$0,28 \times 10^{-11}$	4480	26910
Инглэнда	$0,34 \times 10^{-11}$	5940	35682
Адамса	$0,47 \times 10^{-11}$	9037	18447
Гира	$0,79 \times 10^{-13}$	2024	5830

Гира с автоматическим выбором шага и переменным порядком (с максимальным допустимым порядком 7). Во втором столбце таблицы показана относительная погрешность δ приближенного значения решения, отвечающая наилучшей фактически достигнутой точности в точке x_f . В третьем и четвертом столбцах даны число выполненных шагов N_h и количество вычислений правой части N_f уравнения (9), использованных для достижения такой точности.

Как видно, приближенное решение задачи Коши (9) методом рядов Чебышёва с автоматическим разбиением промежутка интегрирования на элементарные сегменты получено с намного большей точностью за значительно меньшее число шагов и с существенно меньшим количеством вычислений правой части уравнения, чем указанными численными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Приближенное решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений методом рядов Чебышёва // Вычисл. методы и програм. 2016. 17. 121–131.
2. Арушанян О.Б., Волченкова Н.И., Залеткин С.Ф. Вычисление коэффициентов разложения решения задачи Коши в ряд по многочленам Чебышёва // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2012. № 5. 24–30.
3. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. Использование рядов Чебышёва для приближенного аналитического решения обыкновенных дифференциальных уравнений // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2016. № 5. 52–56.
4. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. О разрешимости системы уравнений относительно коэффициентов Фурье–Чебышёва при решении обыкновенных дифференциальных уравнений методом рядов Чебышёва // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2017. № 5. 58–61.
5. Арушанян О.Б., Залеткин С.Ф. О применении формулы численного интегрирования Маркова в ортогональных разложениях // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2009. № 6. 18–22.

Поступила в редакцию
19.02.2020

УДК 517.982.256+517.982.252

ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ СТРОЕНИЕ ЧЕБЫШЁВСКИХ МНОЖЕСТВ И СОЛНЦ В ТРЕХМЕРНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ С ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ НОРМОЙ

А. Р. Алимов¹

Дается геометрическая характеристика чебышёвских множеств и солнц в трехмерных полиэдральных пространствах с цилиндрической нормой. Получен ряд новых свойств чебышёвских множеств, солнц и множеств с непрерывной метрической проекцией в трехмерных цилиндрических пространствах. В работе важную роль играет свойство выпуклости солнц и чебышёвских множеств по касательным направлениям единичной сферы, недавно установленное А. Р. Алимовым и Е. В. Щепиным.

¹ Алимов Алексей Ростиславович — доктор физ.-мат. наук, вед. науч. сотр. лаб. вычислительных методов мех.-мат. ф-та МГУ; глав. спец. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова РАН; вед. науч. сотр. Моск. центра фундаментальной и прикладной математики, e-mail: alexey.alimov-msu@yandex.ru.

Alimov Alexei Rostislavovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Laboratory of Computational Methods; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences; Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics.

Ключевые слова: чебышёвское множество, солнце, монотонно линейно связное множество, цилиндрическая норма, полиэдральная норма.

A geometric characterization of Chebyshev sets and suns in three-dimensional polyhedral spaces with cylindrical norm is presented. A number of new properties of Chebyshev sets, suns, and sets with continuous metric projection in three-dimensional cylindrical spaces is put forward. The new recent fact due to A. R. Alimov and E. V. Shchepin that suns and Chebyshev sets are convex in tangent directions to the unit sphere plays an important role in the paper.

Key words: Chebyshev set, sun, monotone path-connected set, cylindrical norm, polyhedral norm.

1. Введение и формулировки основных результатов. Величиной наилучшего приближения или расстоянием от заданного элемента x линейного нормированного пространства X до заданного непустого множества $M \subset X$ называется величина $\rho(x, M) := \inf_{y \in M} \|x - y\|$. Множество всех ближайших точек (элементов наилучшего приближения) из множества M для заданного $x \in X$ обозначается $P_M x$. Таким образом, $P_M x := \{y \in M \mid \rho(x, M) = \|x - y\|\}$. Множество M называется *чебышёвским множеством*, если оно есть множество существования и множество единственности, т.е. если для каждого $x \in X$ множество $P_M x$ одноточечно. Для подмножества $\emptyset \neq M \subset X$ точка $x \in X \setminus M$ называется *точкой солнечности*, если существует точка $y \in P_M x \neq \emptyset$ (называемая *точкой светимости*), такая, что $y \in P_M((1 - \lambda)y + \lambda x)$ для всех $\lambda \geq 0$ (иными словами, из точки y исходит “солнечный луч”, который проходит через x и для каждой точки которого точка y является ближайшей в множестве M). Множество $M \subset X$ называется *солнцем* (соответственно *строгим солнцем*), если каждая точка $x \in X \setminus M$ есть точка солнечности (соответственно точка строгой солнечности) для M . “Солнца” являются наиболее естественными объектами, для которых выполнен обобщенный критерий Колмогорова о характеристике элемента наилучшего приближения. Им присущи те или иные свойства отделимости: шар можно отделить от такого множества посредством большего шара или опорного конуса (см., например, [1]). Солнечность имеет важные приложения в задачах геометрической оптики и связана с уравнениями Гамильтона–Якоби (см. [1, § 1]) даже в конечномерном случае.

Хорошо известно, что в конечномерном линейном нормированном пространстве 1) любое чебышёвское множество является солнцем и 2) любое солнце линейно связно и локально линейно связно (В. А. Кошечев, А. Л. Браун, см. [1]).

Мы следуем определениям, данным в обзоре [1]. Основные определения приводятся ниже.

Всюду далее X — действительное линейное нормированное пространство; $B(x, r)$ — замкнутый шар с центром x и радиусом r ; $\dot{B}(x, r)$ — открытый шар с центром x и радиусом r ; $S(x, r)$ — сфера с центром x и радиусом r . В частном случае $B := B(0, 1)$ — единичный шар, $S = S(0, 1)$ — единичная сфера.

В двумерном случае чебышёвские множества, солнца и строгие солнца были охарактеризованы в работах П. Грубера, Х. Беренса и Л. Хетцельта, А. Р. Алимова (см. [2]). В пространстве ℓ_n^∞ в геометрических терминах солнца были охарактеризованы Х. Беренсом и Л. Хетцельтом, а строгие солнца и чебышёвские множества — А. Р. Алимовым (см. [1, 3]). В $C(Q)$ чебышёвские множества были охарактеризованы (в аппроксимативных терминах) Ч. Данхемом, Б. Брозовским и Д. Браессом (см. [1]).

В настоящей работе рассматривается задача характеристики чебышёвских множеств и солнц в трехмерных полиэдральных пространствах с цилиндрической нормой. Получен ряд новых свойств чебышёвских множеств, солнц и множеств с непрерывной метрической проекцией в трехмерных цилиндрических пространствах (не обязательно полиэдральных). Важность пространств с цилиндрической нормой в теории приближения показана недавно А. Р. Алимовым и Б. Б. Бедновым (см., например, [4]), которые, в частности, установили, что чебышёвское множество в трехмерном пространстве с цилиндрической нормой монотонно линейно связно, и охарактеризовали трехмерные банаховы пространства, в которых всякое чебышёвское множество монотонно линейно. А. Р. Алимов [4] получил аналогичный результат для замкнутых множеств с непрерывной (полу непрерывной снизу) метрической проекцией.

Далее под *плоскостью* мы будем понимать двумерное аффинное подпространство в X . На любом аффинном подпространстве H рассматривается норма $\|\cdot\|_H$, индуцированная нормой пространства X на H (в качестве начала координат в подпространстве H можно брать любую точку θ из H ; единичный шар B_H пространства H определяется пересечением $B(\theta, 1) \cap H$).

Определение 1. Под *координатным подпространством* в X мы будем понимать аффинное подпространство, параллельное некоторой грани ненулевой размерности шара пространства X (здесь аналогия за неимением большего проистекает из рассмотрения пространства ℓ_n^∞ и координатных

натных подпространств в нем). В частности, если единичный шар B пространства — цилиндр, то любое одномерное аффинное подпространство, порожденное образующей цилиндра B , любая плоскость, порожденная основанием цилиндра, а также все пространство X являются координатными подпространствами.

Определение 2. Под трехмерным пространством с цилиндрической нормой мы будем понимать пространство вида $X = Y \oplus_{\infty} \mathbb{R}$ (единичный шар такого пространства — цилиндр). Конечномерное пространство называется *полиэдральным* (имеющим полиэдральную норму), если единичный шар пространства является выпуклой комбинацией конечного числа точек.

Через $\text{cAff}_k(X)$ мы обозначим класс всех координатных аффинных подпространств пространства X размерности k ($1 \leq k \leq \dim X < \infty$).

Далее, пусть $M \subset X$, $k \in \{2, \dots, \dim X\}$, $P \in \text{cAff}_k(X)$, $Q \in \text{cAff}_{k-1}(P)$.

Определение 3. Следуя [3], будем говорить, что Q — *локально опорная гиперплоскость* к множеству M в подпространстве $P \supset Q$ ($Q \in \text{locTan}_P(M)$), если найдутся точка $x \in Q \cap M$ и ее окрестность $\mathcal{O}(x)$ в P , такие, что Q является опорной гиперплоскостью к $M \cap \mathcal{O}(x)$ в P . Утверждение, что Q — *опорная гиперплоскость* к множеству $M \cap P$ в подпространстве P , будет пониматься обычным образом и записывается в виде $Q \in \text{Tan}_P(M)$.

Нам неоднократно потребуются следующие определение и теорема А (см. [5, 6]).

Определение 4. Для точки $y \in S$ через Λ_y обозначим множество предельных точек выражения $(y - z) / \|y - z\|$ при $z \rightarrow y$, $z \in S$ (т.е. Λ_y — *множество полукасательных направлений* к сфере S в точке y). Направление d называется (глобально) *касательным направлением* для сферы S , если для любой точки $y \in S$ условие опорности направления d в точке y влечет, что $d \in \Lambda_y$, т.е. направление d является касательным в точке y .

Теорема А. 1. В линейном нормированном пространстве солнце выпукло по любому касательному направлению единичной сферы.

2. Подмножество двумерного банахова пространства является солнцем, если и только если оно замкнуто, связно и выпукло по любому касательному направлению сферы.

Теорема 1 (характеризация чебышёвских множеств в трехмерных полиэдральных пространствах с цилиндрической нормой). Подмножество $M \neq \emptyset$ трехмерного пространства с полиэдральной цилиндрической нормой является чебышёвским тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

- множество M замкнуто;
- множество $M \cap H$ связно для любых $k = 1, 2, 3$ и $H \in \text{cAff}_k(X)$;
- для любых $k \in \{2, 3\}$, $H \in \text{cAff}_k(X)$ и $L \in \text{cAff}_{k-1}(H)$ из условия $L \in \text{locTan}_H(M)$ вытекает, что $L \in \text{Tan}_H(M)$ и пересечение $L \cap M$ одноточечно.

Требование полиэдральности пространства в теореме 1 является существенным: в неполиэдральном (или нецилиндрическом) пространстве координатных подпространств может попросту не быть (см. также [7, § 6.3]). С другой стороны, неизвестно, насколько требование полиэдральности пространства может быть разумно ослаблено.

Теорема 1 частично обобщает следующий результат (см. [1]), который нам потребуется в п. 2.

Теорема В. Подмножество $M \neq \emptyset$ пространства ℓ_n^{∞} является чебышёвским тогда и только тогда, когда одновременно выполнены следующие условия:

- множество M замкнуто;
- множество $M \cap P$ связно для любых $k = 1, \dots, n$ и $P \in \text{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$;
- для любых $k = 2, \dots, n$, $P \in \text{cAff}_k(\mathbb{R}^n)$ и $Q \in \text{cAff}_{k-1}(P)$ из условия $Q \in \text{locTan}_P(M)$ вытекает, что $Q \in \text{Tan}_P(M)$ и пересечение $Q \cap M$ одноточечно.

Определение 5. Пусть $k(\tau)$, $0 \leq \tau \leq 1$, — непрерывная кривая в линейном нормированном пространстве X . Кривая $k(\cdot)$ *монотонная*, если функция $f(k(\tau))$ монотонна по τ для любого функционала $f \in \text{ext } S^*$. Замкнутое подмножество называется *монотонно линейно связным* (см. [1, § 9; 8]), если любые две его точки можно соединить непрерывной монотонной кривой, лежащей в этом множестве.

Монотонная линейная связность является более сильным свойством, чем линейная связность, и более слабым, чем выпуклость. Монотонно линейно связные множества и их обобщения активно изучаются в настоящее время (см., например, [9]).

Следующие два результата раскрывают новые свойства чебышёвских множеств и замкнутых множеств с непрерывной (полу непрерывной снизу) метрической проекцией в трехмерных пространствах с цилиндрической нормой.

Теорема 2. Пусть $M \neq \emptyset$ — замкнутое множество с непрерывной метрической проекцией в трехмерном пространстве с цилиндрической нормой. Тогда

- множество M монотонно линейно связно;

2) множество $M \cap H$ является солнцем в H (и, в частности, связно) для любого координатного подпространства $H \in \text{cAff}_k(X)$, $k = 1, 2, 3$ (при условии, что $H \cap M \neq \emptyset$).

Замечание 1. С дальнейшими результатами о связи строгой солнечности, непрерывности метрической проекции и существования непрерывной выборки из наилучших и почти наилучших приближений можно ознакомиться в [10]. Автор недавно показал, что в трехмерном пространстве с цилиндрической нормой замкнутое множество M с полунепрерывной снизу метрической проекцией является строгим солнцем (этот результат также верен в пространстве ℓ_n^∞). При этом, согласно одному результату Н. В. Невесенко (см., например, [10]), в любом конечномерном пространстве с цилиндрической нормой существует строгое солнце (и, более того, замкнутое выпуклое множество), метрическая проекция на которое не полунепрерывна снизу.

Теорема 3. Пусть M — чебышёвское множество в трехмерном пространстве с цилиндрической нормой. Тогда:

- а) множество M замкнуто;
- б) множество $M \cap H$ является чебышёвским множеством в H (в частности, $M \cap H$ связно) для любых $k = 1, 2, 3$ и $H \in \text{cAff}_k(X)$;
- в) для любых $k \in \{2, 3\}$, $H \in \text{cAff}_k(X)$ и $L \in \text{cAff}_{k-1}(H)$ из условия $L \in \text{locTan}_H(M)$ вытекает, что $L \in \text{Tan}_H(M)$ и пересечение $L \cap M$ одноточечно.

Замечание 2. В частном случае пространства ℓ_n^∞ (но для любой размерности n) утверждение б) доказано в [3, теорема 1].

Теорема 4 (характеризация солнц в трехмерных полиэдральных пространствах с цилиндрической нормой). Для непустого подмножества $M \neq \emptyset$ трехмерного пространства X с цилиндрической полиэдральной нормой следующие условия эквивалентны:

- а) M — солнце;
- б) M замкнуто, связно и пересечение M с любой координатной аффинной гиперплоскостью H в X является солнцем в H или пусто.

Теорема 4 частично обобщает следующую характеристику солнц в пространстве ℓ_n^∞ (см. [11]): непустое множество $M \subset \ell_n^\infty$ является солнцем в ℓ_n^∞ , если и только если M замкнуто, связно и пересечение M с любой координатной аффинной гиперплоскостью H в ℓ_n^∞ является солнцем в H или пусто.

2. Доказательства теорем 1–4. Напомним (см. [1, § 3.2]), что множество

$$\mathring{K}(y, x) = \bigcup_{r>0} \mathring{B}(-ry + (r + 1)x, (r + 1)\|x - y\|),$$

состоящее из гомотетичных раздутий шара $\mathring{B}(x, \|x - y\|)$ относительно точки y , называется *опорным конусом* к шару $B(x, \|x - y\|)$ в его граничной точке y . Следующий результат (см., например, [1, теорема 3.1]) является переформулировкой на случай солнц классического критерия Колмогорова ближайшего элемента для выпуклых множеств.

Лемма А. Множество $M \subset X$ является солнцем в X тогда и только тогда, когда для каждой точки $x \notin M$ найдется точка $y \in P_M x$, такая, что $\mathring{K}(y, x) \cap M = \emptyset$.

Доказательство теоремы 2. Утверждение 1 установлено в [4]. Для размерности 2 пространства H требуемый результат содержится в [4] в качестве вспомогательного результата. В случае $\dim H = 3$ следует воспользоваться следующим более общим результатом И. Г. Царькова [12, теорема 2.2]: замкнутое подмножество конечномерного нормированного пространства с полунепрерывной снизу метрической проекцией является (P -ациклическим) солнцем.

Пусть теперь $\dim H = 1$. Ясно, что в пространстве с цилиндрической нормой любое направление из одномерного координатного аффинного подпространства H является касательным, поэтому по теореме А пересечение $M \cap H$ выпукло (и, следовательно, является солнцем). Теорема 2 доказана. \square

Доказательство теоремы 3. Утверждение а) очевидно. Докажем утверждение б). Солнечность непустого пересечения $M \cap H$ гарантируется теоремой 2. Обозначим $M' := M \cap H$. Докажем, что M' — чебышёвское множество в H . Нетривиальный случай имеет место только при $\dim H = 2$, поэтому считаем, что H — координатная плоскость. Рассуждая от противного, мы можем найти такую точку $x \in H$, для которой множество ближайших $P_{M'} x$ в H неодноточечно. Согласно хорошо известной теореме Беренса–Хетцельта (см., например, [2, теорема А]), в этом случае $P_{M'} x$ представляет собой отрезок или объединение двух отрезков с общим концом. Соответственно пусть I — невырожденный отрезок из $P_{M'} x$, u — точка из его относительной внутренней ($u \in \text{ri } I$). Нам потребуется следующий простой результат (см., например, [1, предложение 4.1]): в конечномерном пространстве каждая граничная точка солнца является его точкой светимости. Поскольку отрезок I лежит в пересечении границы множества M (в пространстве X) и некоторой координатной

прямой (см. определение 1), то мы можем найти точку $z \in X$, для которой точка u будет ближайшей. По условию шар B является цилиндром, и, значит, $S(z, \|z - u\|) \cap \text{ri} I \neq \emptyset$, что противоречит тому, что M — чебышёвское множество. Утверждение b доказано.

Докажем утверждение c . Пусть сначала координатная плоскость H порождена боковой двумерной гранью цилиндра B (если такая плоскость H существует), и пусть $M \cap H \neq \emptyset$. Поскольку боковая плоская грань трехмерного цилиндра естественным образом отождествляется с шаром (весового) пространства ℓ_2^∞ , то мы можем отождествить H (с индуцированной нормой) с пространством ℓ_2^∞ . В этом случае утверждение c вытекает из теоремы В и уже доказанного п. b .

Пусть теперь H — аффинная координатная плоскость, порожденная основанием цилиндра B , и пусть L — координатная прямая, являющаяся локально опорной в плоскости H к множеству $M' := M \cap H$. По определению локальной опорности это означает, что найдется точка $y_0 \in L \cap M$ и ее окрестность $\mathcal{O}(y_0)$ в H , такие, что L является опорной прямой к множеству $M' \cap \mathcal{O}(y_0)$ в пространстве H . Из свойства локальной опорности в точке y_0 следует, что мы можем найти точку $x \in H \cap \mathcal{O}(y_0)$, для которой y_0 является ближайшей точкой из M' в H относительно нормы $\|\cdot\|_H$, при этом так как L — координатная прямая, то точка y_0 содержится в относительной внутренней некоторой одномерной грани F шара $B_H(x, \|x - y_0\|_H)$. Поскольку по п. b M' — чебышёвское множество, то пересечение $F \cap M'$ одноточечно. Поэтому так как по теореме А множество M выпукло по касательным направлениям (в частности, множество $M' \cap L$ выпукло), то пересечение $M' \cap L$ одноточечно. Это доказывает утверждение c при $k = 2$.

Пусть теперь $k = 3$, Q — двумерное координатное подпространство, локально опорное к множеству M в некоторой точке y_0 . Это означает, что найдется окрестность $\mathcal{O}(y_0)$ точки y_0 , такая, что Q является опорной плоскостью к множеству $M \cap \mathcal{O}(y_0)$. Как и выше, находим точку $x \in \mathcal{O}(y_0)$, такую, что y_0 — ближайшая точка из $M \cap \mathcal{O}(y_0)$ для x и $B(x, r) \subset \mathcal{O}(y_0)$, где $r := \rho(x, M) \cap \mathcal{O}(y_0)$. Поскольку Q — координатная плоскость, то мы всегда можем добиться того, что точка y_0 будет лежать в относительной внутренней двумерной грани шара $B(x, r)$. В нашем случае конус $\dot{K}(y_0, x)$ — открытое полупространство с границей Q . По лемме А $\dot{K}(y_0, x) \cap M = \emptyset$, так как M — чебышёвское множество в конечномерном пространстве и, значит, солнцем. В силу того что подпространство Q порождается двумерной гранью шара B , одноточечность пересечения $Q \cap M$ очевидна ввиду равенства $\dot{K}(y_0, x) \cap M = \emptyset$ и того факта, что M — чебышёвское множество. Таким образом, условие 3 с $k = 3$ выполнено и теорема 3 доказана. \square

При изучении связности солнц в конечномерных пространствах А. Л. Браун (см. [13; 1, § 9.3]) ввел важный класс (ВМ) линейных нормированных пространств. В таких пространствах установлен ряд нетривиальных результатов о геометрическо-топологических свойствах солнц и близких к ним множеств.

Линейное нормированное пространство X называется (ВМ)-пространством, если

$$B(0, \|x\|) \cap (m(x, y) \setminus \{x\}) \neq \emptyset \quad \text{при условии, что} \quad [x, x - y] \cap \dot{B}(0, \|x\|) = \emptyset, \quad x \neq 0.$$

Здесь и далее $m(x, y)$ — пересечение всех замкнутых шаров, содержащих точки x, y (оболочка Банаха–Мазура точек x и y).

Класс (ВМ)-пространств содержит все гладкие пространства, все двумерные пространства с полигональным единичным шаром, пространства $\ell_n^\infty, c_0, c, \ell^\infty$ (см. [1]). Строго выпуклое пространство лежит в классе (ВМ) тогда и только тогда, когда оно гладкое [13]. Пространства $\ell^1, \ell_n^1, n \geq 3$, не принадлежат классу (ВМ). Двумерные и трехмерные (ВМ)-пространства охарактеризованы А. Л. Брауном [13, 14] (см. также лемму В).

Лемма В. *Трехмерное пространство X лежит в классе (ВМ), если и только если X или является гладким пространством, или имеет вид $X = Y \oplus_\infty \mathbb{R}$, где Y — двумерное (ВМ)-пространство.*

Нам потребуется (см. [13, теорема 4.2]) следующая характеристика А. Л. Брауна солнц в конечномерных (ВМ)-пространствах в терминах m -связности (связности по Менгеру).

Лемма С. *Непустое подмножество N конечномерного (ВМ)-пространства является солнцем, если и только если оно m -связно, т.е.*

$$(m(x, y) \setminus \{x, y\}) \cap N \neq \emptyset \quad \forall x, y \in N, \quad x \neq y. \quad (1)$$

Хорошо известно (см. [15]), что ограниченно компактное m -связное множество монотонно линейно связно. Как следствие имеет место следующий результат (см. [15, теорема 4.1]).

Лемма Д. *Произвольное солнце (u , следовательно, произвольное чебышёвское множество) на нормированной плоскости и в конечномерном (ВМ)-пространстве монотонно линейно связно.*

Замечание 3. Трехмерное пространство с цилиндрической нормой не обязательно лежит в классе (ВМ): достаточно в качестве Y взять пространство со строго выпуклым негладким шаром (см. лемму В). Поэтому первое утверждение теоремы 1 не вытекает из леммы D.

Доказательство теоремы 4. Необходимость. Пусть M — солнце в трехмерном полиэдральном пространстве X с цилиндрической нормой. Ясно, что M замкнуто. Хорошо известно, что солнце в конечномерном пространстве связно. Далее, так как по лемме В пространство X лежит в классе (ВМ), то по лемме D множество M монотонно линейно связно. Любая двумерная грань единичного шара B пространства X содержит точки гладкости, и, следовательно, ее аффинная оболочка L есть линия уровня некоторого экстремального функционала $f \in \text{ext } S^*$. Пусть H — произвольный сдвиг аффинного подпространства L . Так как $L = \{u \mid f(u) = c\}$ при некоторых $c \in \mathbb{R}$ и $f \in \text{ext } S^*$, то $M \cap H$ монотонно линейно связно и, следовательно, если пересечение $M \cap H$ непусто, то оно является солнцем в H как пересечение двух монотонно линейно связных множеств — множества M и координатной плоскости H .

Достаточность. Пусть множество M замкнуто, связно, и пусть пересечение M с любой координатной аффинной гиперплоскостью H в X является солнцем в H (или пусто). Докажем, что множество M m -связно. Рассуждая от противного, предположим, что найдутся точки $x, y \in M$, для которых $(m(x, y) \setminus \{x, y\}) \cap M = \emptyset$. Так как по условию для любой координатной плоскости H пересечение $M \cap H$ является солнцем в H , то по лемме С непустое пересечение $M \cap H$ m -связно. Поэтому x, y не лежат ни в какой координатной плоскости и, значит, многогранник $m(x, y)$ является телом.

Далее рассуждаем, как в [11]. Обозначим через F_1, \dots, F_ν все двумерные грани тела $m(x, y)$, содержащие точку x , а через E_1, \dots, E_μ все двумерные грани тела $m(x, y)$, содержащие точку y (так как $m(x, y)$ — цилиндр, то $\nu, \mu \leq 3$). Рассматривая все координатные плоскости H , проходящие через точки x и y , и принимая во внимание, что по условию непустое пересечение $M \cap H$ является солнцем в H , из (1) получаем $F_i \cap M = \{x\}$, $E_j \cap M = \{y\}$, $i = 1, \dots, \nu$, $j = 1, \dots, \mu$.

Для произвольного множества $F \subset \mathbb{R}^3$ и его граничной точки z определим

$$\text{cone}(F, z) := \{\alpha f + (1 - \alpha)z \mid f \in F, \alpha \geq 0\}.$$

Далее, поскольку по условию пересечение множеств M с координатной плоскостью $\text{aff } F_i$ (аффинной оболочкой грани F_i) является солнцем для любого i и, следовательно, по лемме D пересечение $M \cap \text{aff } F_i$ монотонно линейно связно в пространстве $\text{aff } F_i$, то имеем

$$\text{cone}(F_i, x) \cap M = \{x\}, \quad \text{cone}(E_j, y) \cap M = \{y\}, \quad i = 1, \dots, \nu, \quad j = 1, \dots, \mu. \tag{2}$$

Множество M линейно связно как чебышёвское множество в конечномерном пространстве, $x, y \in M$, но точки x, y нельзя соединить кривой, лежащей в M , поскольку множество

$$U := \left(m(x, y) \cup \left(\bigcup_{i=1}^{\nu} \text{cone}(F_i, x) \right) \cup \left(\bigcup_{j=1}^{\mu} \text{cone}(E_j, y) \right) \right) \setminus \{x, y\}$$

разделяет пространство X , $U \cap M = \emptyset$ в силу (2), точки x и y лежат в разных компонентах связности множества $X \setminus U$ и $U \cap M = \emptyset$. Полученное противоречие показывает, что M — солнце в X . Теорема 4 доказана. \square

Доказательство теоремы 1. Необходимость доказана в теореме 3.

Достаточность. Если X — конечномерное полиэдральное пространство и $s \in X$, $\|s\| = 1$, то через $E(s)$ обозначим наименьшую грань шара B , содержащую точку s (ясно, что $s \in \text{ri } E(s)$).

По условию a множество M замкнуто, поэтому $P_M z \neq \emptyset$ для любого $z \in X$. Пусть точка $y \in P_M 0$ такова, что $\dim E(y) = \max\{\dim E(z) \mid z \in P_M 0\} =: d$. Понятно, что если F — грань шара B и $\dim F > d$, то $\text{ri } F \cap M = \emptyset$.

Установим, что $P_M 0 = \{y\}$.

1. Пусть $d = 2$. Положим $P = X$, $Q = \text{aff } E(y)$ ($\dim Q = 2$). Поскольку $\mathring{B} \cap M = \emptyset$, то Q — локально опорная гиперплоскость к множеству M в точке y . По свойству c Q — опорная гиперплоскость к множеству M в точке x и $Q \cap M = \{x\}$. Ясно, что тогда $P_M 0 = \{y\}$.

2. Пусть теперь $d = 1$. Пусть G — собственная грань шара B , содержащая в своей относительной границе грань $E(y)$. По предположению $\text{ri } G \cap M = \emptyset$. Положим $P := \text{aff } G$, $Q := \text{aff } E(y)$ (в нашем случае $\dim P = 2$, $\dim Q = 1$). Ясно, что P и Q — координатные подпространства. По условию п. b пересечение $M \cap E(y)$ связно, поэтому $E(y)$ содержит невырожденный отрезок $I \subset M$. Пусть $v \in \text{ri } I$.

Тогда Q — локально опорная прямая в точке v к множеству M , но пересечение $Q \cap M$ неодноточечно (содержит отрезок I). Полученное противоречие показывает, что случай 2 невозможен.

Остается единственный случай: $\dim E(y) = 0$, но тогда, очевидно, $P_M 0 = \{y\}$. Теорема 1 доказана. \square

Автор выражает благодарность И. Г. Царькову и П. А. Бородину за полезные обсуждения. Работа выполнена при поддержке РФФИ (проекты №18–01–00333-а, 19–01–00332-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алимов А.Р., Царьков И.Г. Связность и солнечность в задачах наилучшего и почти наилучшего приближения // Успехи матем. наук. 2016. **71**, №1. 3–84 (DOI: 10.4213/gm9698).
2. Алимов А.Р. Сохранение аппроксимативных свойств чебышёвских множеств и солнц на плоскости // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2008. №4. 46–49.
3. Алимов А.Р. Геометрическое строение чебышёвских множеств в $\ell^\infty(n)$ // Функц. анализ и его прил. 2005. **39**, №1. 1–10 (DOI: 10.4213/faa27).
4. Алимов А.Р. Выпуклость и монотонная линейная связность множеств с непрерывной метрической проекцией в трехмерных пространствах // Тр. ИММ УрО РАН. 2020. **26**, №2. 29–46 (DOI: 10.21538/0134-4889-2020-26-2-28-46).
5. Alimov A.R., Shchepin E.V. Convexity of suns in tangent directions // J. Convex Analysis. 2019. N 4. 1071–1076.
6. Алимов А.Р., Щепин Е.В. Выпуклость чебышёвских множеств по касательным направлениям // Успехи матем. наук. 2018. **73**, № 2. 185–186 (DOI: 10.4213/gm9813).
7. Алимов А.Р., Царьков И.Г. Чебышёвский центр множества, константа Юнга и их приложения // Успехи матем. наук. 2019. **74**, № 5. 3–82 (DOI: 10.4213/gm9839).
8. Алимов А.Р. Монотонная линейная связность чебышёвских множеств в пространстве $C(Q)$ // Матем. сб. 2006. **197**, № 9. 3–18 (DOI: 10.4213/sm1129).
9. Царьков И.Г. Слабо монотонные множества и непрерывная выборка в несимметричных пространствах // Матем. сб. 2019. **210**, № 9. 129–155 (DOI: 10.4213/sm9107).
10. Алимов А.Р. Выборки из метрической проекции и строгая солнечность множеств с непрерывной метрической проекцией // Матем. сб. 2017. **208**, № 7. 3–18 (DOI: 10.4213/sm8765).
11. Алимов А.Р. Сохранение аппроксимативных свойств подмножеств чебышевских множеств и солнц в $\ell^\infty(n)$ // Изв. РАН. Сер. матем. 2006. **70**, № 5. 3–12 (DOI: 10.4213/im1115).
12. Царьков И.Г. Непрерывность метрической проекции, структурные и аппроксимативные свойства множеств // Матем. заметки. 1990. **47**, № 2. 137–148
13. Brown A.L. Suns in normed linear spaces which are finite dimensional // Math. Ann. 1987. **279**. 87–101 (DOI: 10.1007/BF01456192).
14. Brown A.L. On the problem of characterising suns in finite dimensional spaces // Rend. Circ. Mat. Palermo (2) Suppl. 2002. **68**, part I. 315–328.
15. Алимов А.Р. Монотонная линейная связность и солнечность связанных по Менгеру множеств в банаховых пространствах // Изв. РАН. Сер. матем. 2014. **78**, № 4. 3–18 (DOI: : 10.4213/im8128).

Поступила в редакцию
25.10.2019

Механика

УДК 539.3

ПРИКЛАДНЫЕ ВОПРОСЫ ТЕОРИИ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ А.А. ИЛЬЮШИНА

И. Н. Молодцов¹

На основании анализа экспериментальных результатов процессов сложного нагружения по винтовым траекториям деформаций выяснено, что отклик на винтовую траекторию деформации, следующую за простым нагружением, принимает по исчерпанию некоторого следа вполне определенную форму предельного режима, т.е. имеет место соответствие геометрии траектории деформации и формы отклика. Рассматривается вариант определяющих уравнений для описания процессов сложного нагружения с траекториями деформаций произвольной геометрии и размерности. Получены векторные определяющие уравнения и система дифференциальных уравнений для четырех углов из разложения направляющего вектора напряжений в репере Френе. Доказано, что вектор напряжений представляется в виде суммы трех слагаемых: быстро затухающих пластических следов упругих состояний, мгновенных откликов на процесс деформации и накапливаемых вдоль траектории деформации необратимых напряжений. Построен новый метод математического моделирования пятимерных процессов сложного нагружения, аттестованный на двух и трехмерных процессах.

Ключевые слова: сложное нагружение, определяющие соотношения, траектория деформаций и отклик, теорема изоморфизма, калибровка функционалов.

Based on the analysis of the experimental results of the complex loading processes along the helical deformation trajectories, it is found that the response to the helical deformation trajectory takes a certain form of a limiting regime after the simple loading and after the exhaustion of some trace; in other words, the correspondence of the geometry of the deformation trajectory and the shape of the response takes place. A new form of constitutive equations are considered to study complex loading processes with deformation trajectories of arbitrary geometry and dimension. Some vector constitutive equations and a system of differential equations for the four angles of the stress vector decomposition in the Frenet frame are obtained. It is shown that the stress vector is represented as the sum of the following three components: the rapidly decaying plastic traces of elastic states, the instantaneous responses to deformation processes, and the irreversible stresses accumulated along a deformation trajectory. A new method of mathematical modeling of five-dimensional processes of complex loading is proposed and substantiated for two- and three-dimensional processes.

Key words: complex loading, constitutive equations, deformation and stress trajectories, theorem of isomorphism, calibration of functionals.

1. Основные уравнения. Хорошо известной в теории упругопластических процессов является так называемая формула А.А. Ильюшина [1]:

$$\frac{d\bar{\sigma}}{ds} = Q \frac{d\bar{\varepsilon}}{ds} + (P - Q) \left(\frac{d\bar{\varepsilon}}{ds}, \bar{n}_\sigma \right) \bar{n}_\sigma, \quad (1)$$

где $\bar{\varepsilon}$, $\bar{\sigma}$ — пятимерные векторы деформации и напряжений, построенные на основе девиаторов соответствующих тензоров; s — длина дуги траектории деформации; \bar{n}_σ — направляющий вектор напряжений; P, Q — определяющие функционалы.

В двумерном пространстве деформации E_2 , где согласно Френе

$$\bar{n}_\sigma = \cos \theta_1 \bar{n}_1 - \sin \theta_1 \bar{n}_2,$$

¹ Молодцов Игорь Николаевич — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теории упругости мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: mechmathmsu@mail.ru.

Molodtsov Igor Nikolaevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theory of Elasticity.

уравнению (1) соответствует одно скалярное уравнение для угла θ_1 :

$$\dot{\theta}_1 = \varkappa_1 - \frac{Q}{\sigma} \sin \theta_1. \quad (2)$$

Все величины здесь являются функциями длины дуги траектории деформаций s , $\varkappa_1(s)$ обозначает кривизну траектории деформации. Производные величин по длине дуги в (1) были выписаны явно, но далее для компактности формул заменяются точкой. Интегрируем уравнение (1) подстановкой $\bar{\sigma} = \Sigma (\bar{\sigma}/\Sigma)$. Тогда получим, что при условии

$$\frac{1}{\Sigma} \frac{d\Sigma}{ds} = \frac{1}{\sigma} \frac{d\sigma}{ds} - \frac{Q}{\sigma} \cos \theta_1 \quad (3)$$

уравнение интегрируется:

$$\bar{\sigma}(s) = \frac{\Sigma}{\Sigma_0} (\bar{\sigma}_0 - Q_0 \bar{\varepsilon}_0) + Q(s) \bar{\varepsilon}(s) - \Sigma \int_0^s \bar{\varepsilon} d \left(\frac{Q}{\Sigma} \right). \quad (4)$$

Формула (4) представляет решения (1) в виде суммы трех слагаемых. Первое из них отвечает влиянию на напряжение в некоторой точке траектории деформации истории, т.е. деформации и напряжений в начальной точке процесса. Согласно принципу запаздывания векторных свойств А.А. Ильюшина, это влияние ограничено некоторым малым следом запаздывания. Это означает, что первое слагаемое является быстро затухающим пластическим следом упругих состояний и ответственная за это скалярная функция $\Sigma(s)$ также должна затухать. Второе слагаемое соответствует мгновенному отклику напряжений на процесс деформации в той же точке, а третье суть накапливаемые вдоль траектории деформации необратимые напряжения:

$$\bar{\sigma}_p(s) = -\Sigma \int_0^s \bar{\varepsilon} d \left(\frac{Q}{\Sigma} \right).$$

Функция Σ имеет смысл метрики, и уравнение (3) связывает между собой три функции $\theta_1(s)$, $\sigma(s)$, $\Sigma(s)$. В нашем рассмотрении это уравнение будет использовано ниже как уравнение для $\sigma(s)$. Изменение метрики происходит с момента начала изменения пластической деформации, и поэтому функция $\Sigma(s)$ в нашем случае ассоциирована с пластичностью.

Дифференциальное уравнение (3) преобразуется с помощью формулы (2) для исключения функционала Q :

$$\frac{\dot{\Sigma}}{\Sigma} = \frac{\dot{\sigma}}{\sigma} + \frac{(\sin \theta_1)}{\sin \theta_1} - \varkappa_1 \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1},$$

после чего интегрируется с результатом

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_0} = \frac{\sigma}{\sigma_0} \frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_{10}} \exp \left(- \int_0^s \varkappa_1 \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} ds \right). \quad (5)$$

Мы получили два основных уравнения модели — уравнение (2), которое будет использовано для калибровки функционала Q , и уравнение (5) для вычисления $\sigma(s)$. Третье уравнение получается дифференцированием формулы для $\bar{\sigma}_p(s)$:

$$\dot{\bar{\sigma}}_p = \frac{\dot{\Sigma}}{\Sigma} (\bar{\sigma}_p + Q \bar{\varepsilon}) - \dot{Q} \bar{\varepsilon}. \quad (6)$$

Это уравнение после преобразований определит зависимость $\theta_1(s)$ и собственно уравнение для $\bar{\sigma}_p$. Все соотношения в данном пункте содержат функцию Σ . Она, как мы выяснили выше, должна быть убывающей, но в остальном она пока произвольна.

2. Общий случай пятимерного процесса деформации. В пункте 1 мы построили три вида соотношений, которые решают двумерную задачу, т.е. задачи калибровки функционала и нахождения зависимостей $\sigma(s)$ и $\theta_1(s)$. Поэтому и в случае пятимерных процессов деформации ставится

задача отыскания определяющих уравнений, приводящих к системе уравнений для углов репера Френе, в каждое из уравнений которой входит единственный функционал. В этом случае задача калибровки функционалов будет максимально простой. Рассматриваем пятимерное пространство девиатора деформации с репером, состоящим из направляющего вектора напряжений и еще четырех векторов, построенных на основе ортов репера Френе:

$$\begin{aligned} \bar{n}_\sigma, \bar{n}'_1 &\equiv \frac{\bar{n}_1 - \cos \theta_1 \bar{n}_\sigma}{\sin \theta_1}, \\ \bar{n}'_2 &\equiv \frac{\bar{n}_2 - (\bar{n}_2, \bar{n}_\sigma) \bar{n}_\sigma - (\bar{n}_2, \bar{n}'_1) \bar{n}'_1}{\sin \theta_2}, \\ \bar{n}'_3 &\equiv \frac{\bar{n}_3 - (\bar{n}_3, \bar{n}_\sigma) \bar{n}_\sigma - (\bar{n}_3, \bar{n}'_1) \bar{n}'_1 - (\bar{n}_3, \bar{n}'_2) \bar{n}'_2}{\sin \theta_3}, \\ \bar{n}'_4 &\equiv \frac{\bar{n}_4 - (\bar{n}_4, \bar{n}_\sigma) \bar{n}_\sigma - (\bar{n}_4, \bar{n}'_1) \bar{n}'_1 - (\bar{n}_4, \bar{n}'_2) \bar{n}'_2 - (\bar{n}_4, \bar{n}'_3) \bar{n}'_3}{\sin \theta_4}, \\ \bar{n}_\sigma &= \cos \theta_1 \bar{n}_1 - \sin \theta_1 (\cos \theta_2 \bar{n}_2 - \sin \theta_2 (\cos \theta_3 \bar{n}_3 - \sin \theta_3 (\cos \theta_4 \bar{n}_4 - \sin \theta_4 \bar{n}_5))). \end{aligned}$$

Определяющие уравнения в пятимерном пространстве выбираются по аналогии с трехчленной формулой А.А. Ильюшина и имеют вид

$$\dot{\bar{n}}_\sigma = \frac{Q}{\sigma} \sin \theta_1 \bar{n}'_1 + \frac{F}{\sigma} \sin \theta_2 \bar{n}'_2 + \frac{U}{\sigma} \sin \theta_3 \bar{n}'_3 + \frac{W}{\sigma} \sin \theta_4 \bar{n}'_4. \tag{7}$$

Кроме четырех определяющих функционалов Q, F, U, W в уравнение (7), в выражение производной направляющего вектора напряжений, неявно входит функционал P , отвечающий за скалярные свойства материала. Как и выше в двумерном случае, в пространствах высокой размерности строим уравнения для углов, аналогичные (2). В пятимерном пространстве напряжений результат приводит к системе дифференциальных уравнений для четырех углов разложения вектора напряжений в репере Френе:

$$\begin{cases} \dot{\theta}_1 = \varkappa_1 \cos \theta_2 - \frac{Q}{\sigma} \sin \theta_1, \\ \dot{\theta}_2 = \varkappa_2 \cos \theta_3 - \varkappa_1 \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} \sin \theta_2 + \frac{F \sin \theta_2}{\sigma \sin \theta_1}, \\ \dot{\theta}_3 = \varkappa_3 \cos \theta_4 - \varkappa_2 \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} \sin \theta_3 - \frac{U \sin \theta_3}{\sigma \sin \theta_1 \sin \theta_2}, \\ \dot{\theta}_4 = \varkappa_4 - \varkappa_3 \frac{\cos \theta_3}{\sin \theta_3} \sin \theta_4 + \frac{W \sin \theta_4}{\sigma \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3}. \end{cases} \tag{8}$$

Система уравнений (8) решает поставленную выше задачу. В каждое из ее уравнений входит один функционал, и он легко этим уравнением определяется. В пятимерном пространстве деформаций E_5 уравнения (7) при условии

$$\frac{\Sigma}{\Sigma_0} = \frac{\sigma \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \theta_3 \sin \theta_4}{\sigma_0 \sin \theta_{10} \sin \theta_{20} \sin \theta_{30} \sin \theta_{40}} \exp \left(- \int_0^s \varkappa_4 \frac{\cos \theta_4}{\sin \theta_4} ds \right), \tag{9}$$

повторяющем формулу (5) в E_2 , упрощаются:

$$\left(\frac{\dot{\bar{\sigma}}}{\bar{\Sigma}} \right) = \bar{n}_1 \frac{Q_1}{\bar{\Sigma}} + \bar{n}_2 \frac{F_1}{\bar{\Sigma}} + \bar{n}_3 \frac{U_1}{\bar{\Sigma}} + \bar{n}_4 \frac{W}{\bar{\Sigma}},$$

а после интегрирования дают искомую трехчленную формулу для напряжений:

$$\bar{\sigma}(s) = \bar{\sigma}_{tr}(s) + \bar{\sigma}_r(s) + \bar{\sigma}_p(s).$$

Здесь

$$Q_1 \equiv Q - \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} \left(F \cos \theta_2 - U \frac{\cos \theta_3}{\sin \theta_2} + W \frac{\cos \theta_4}{\sin \theta_2 \sin \theta_3} \right),$$

$$F_1 \equiv F - U \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} \cos \theta_3 + W \frac{\cos \theta_2 \cos \theta_4}{\sin \theta_2 \sin \theta_3},$$

$$U_1 \equiv U - W \frac{\cos \theta_3}{\sin \theta_3} \cos \theta_4.$$

Выражения отдельных компонент напряжений подобны формулам (4) и естественным образом обобщают их. Так, пластический след упругих состояний усложняет историю

$$\bar{\sigma}_{\text{tr}} = \frac{\Sigma}{\Sigma_0} \left\{ \bar{\sigma}_0 - \left(Q_{10} + U_{10} \frac{\varkappa_{10}}{\varkappa_{20}} \right) \bar{\varepsilon}_0 - \frac{1}{\varkappa_{10}} \left(F_{10} + W_0 \frac{\varkappa_{20}}{\varkappa_{30}} \right) \bar{n}_{10} - \frac{U_{10}}{\varkappa_{20}} \bar{n}_{20} - \frac{W_0}{\varkappa_{30}} \bar{n}_{30} \right\},$$

но опять определяет смысл функции $\Sigma(s)$ как следовой реакции, ответственной за реализацию принципа запаздывания.

Регулярная часть напряжений в пятимерном процессе определяется не только деформацией, но и производными деформации вплоть до третьего порядка:

$$\bar{\sigma}_r = \left(Q_1 + \frac{U_1 \varkappa_1}{\varkappa_2} \right) \bar{\varepsilon} + \frac{1}{\varkappa_1} \left(F_1 + \frac{W \varkappa_2}{\varkappa_3} \right) \bar{n}_1 + \frac{U_1}{\varkappa_2} \bar{n}_2 + \frac{W}{\varkappa_3} \bar{n}_3.$$

Необратимые напряжения представимы в виде

$$\bar{\sigma}_p(s) = -\Sigma \left\{ \int_0^s \bar{\varepsilon} d \frac{1}{\Sigma} \left(Q_1 + \frac{U_1 \varkappa_1}{\varkappa_2} \right) + \int_0^s \bar{n}_1 d \frac{1}{\Sigma \varkappa_1} \left(F_1 + \frac{W \varkappa_2}{\varkappa_3} \right) + \int_0^s \bar{n}_2 d \frac{U_1}{\Sigma \varkappa_2} + \int_0^s \bar{n}_3 d \frac{W}{\Sigma \varkappa_3} \right\}. \quad (10)$$

Задача математического моделирования процессов сложного нагружения является крайне сложной из-за необходимости калибровки определяющих функционалов. Современная экспериментальная техника такова, что мы можем обеспечить калибровку процессов с размерностью не выше трех. По образному выражению Б.Е. Победри, “в ближайшие 2–3 сотни лет не следует ждать появления техники и технологий для экспериментального изучения процессов деформации высокой размерности” (цитирование производится по памяти и, возможно, не слишком точно). В любом случае искать классические решения задачи безнадежно сложно. Однако... Заметим, что все без исключения полученные выше формулы являются точными. Для процессов деформации любой размерности неизвестными механическими функциями задачи являются: углы, функционалы, напряжения $\bar{\sigma}$ и величина σ , а известными — деформации, длина дуги s и кривизны. Еще есть функция Σ , которая была введена при разрешении определяющих уравнений. Она входит во все без исключения формулы и соотношения, но уравнения для нее нет: она произвольна, хотя ее смысл и назначение понятны (реализация принципа запаздывания).

3. Калибровка функционалов и выбор метрики. Как выше уже было отмечено, в условиях лабораторий недостаточно экспериментальных возможностей для моделирования пятимерных процессов с независимым контролем отдельных функционалов, в связи с этим предлагается неклассический подход.

Поскольку в каждом из уравнений (8) присутствует только один функционал процесса, то и будем определять эти функционалы из уравнений для углов (обычно поступают иначе). Идею проиллюстрируем на двумерном процессе. Из (2) находим

$$Q = -\sigma \left(\frac{\dot{\theta}_1 - \varkappa_1}{\sin \theta_1} \right),$$

где заменяем $\sigma(s)$ соответствующим выражением из (5), а затем вычисляем интеграл и записываем дифференциальное уравнение (6). В результате имеем

$$\dot{\bar{\sigma}}_p = \frac{\dot{\Sigma}}{\Sigma} \bar{\sigma}_p - \frac{\gamma \Sigma}{\sin \theta_1} \bar{\varepsilon} \left\{ 2 \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} \dot{\theta}_1 \varkappa_1 - \frac{\ddot{\theta}_1}{\sin \theta_1} + 2(\dot{\theta}_1)^2 \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1} - \dot{\varkappa}_1 + \varkappa_1^2 \cos \theta_1 \right\} \exp \left(- \int_0^s \varkappa_1 \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} ds \right).$$

Здесь $\gamma \equiv (\sigma_0 \sin \theta_{10})/\Sigma_0$. Заметим, что в последней формуле смешались величины разной физической природы. С одной стороны, есть величины, которые мы относим к необратимостям, такие, как

изменение метрики и необратимые напряжения, с другой — величины, характеризующие отклик материала на данный процесс деформации. Мы **искусственно** разделяем эти величины, полагая, что

$$\frac{1}{\sin \theta_1} \left\{ 2 \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} \dot{\theta}_1 \varkappa_1 - \frac{\ddot{\theta}_1}{\sin \theta_1} + 2(\dot{\theta}_1)^2 \frac{\cos \theta_1}{\sin^2 \theta_1} - \dot{\varkappa}_1 + \varkappa_1^2 \cos \theta_1 \right\} \exp \left(- \int_0^s \varkappa_1 \frac{\cos \theta_1}{\sin \theta_1} ds \right) = \frac{1}{k^2}, \quad (11)$$

$$\dot{\bar{\sigma}}_p = \frac{\dot{\Sigma}}{\Sigma} \bar{\sigma}_p - \frac{\gamma \Sigma}{k^2} \bar{\varepsilon}. \quad (12)$$

Входящий в (11) и (12) калибровочный параметр k является пластическим следом. Уравнение (11) определяет зависимость угла $\theta_1(s)$ в процессе деформации от начальной точки с заданными характеристиками $\bar{\sigma}_0, \bar{\varepsilon}_0, \sigma_0, \Sigma_0, \sin \theta_{10}$ по произвольной траектории $\bar{\varepsilon}(s)$ сложной геометрии. Это уравнение можно привести к дифференциальному уравнению 3-го порядка без интеграла в правой части.

1. В частном случае процесса деформации в виде двухзвенной ломаной линии ($\varkappa_1 = 0$) уравнение (11) упрощается:

$$\left(\frac{\dot{\theta}_1}{\sin^2 \theta_1} \right)' = -\frac{1}{k^2}$$

и интегрируется:

$$\theta_1(s) = \frac{\pi}{2} - \arctg \left(\frac{s^2}{2k^2} \right), \quad \theta_{10} = \frac{\pi}{2}.$$

График зависимости θ_1/θ_{10} хорошо соответствует экспериментальным данным Р.А. Васина [2] по сложному нагружению, когда реализовывались траектории деформации с различными углами излома от нуля до $\pi/2$. Выяснилось, что зависимость $\theta_1(s)$ для траектории с изломом на угол $\pi/2$ включает в себя на соответствующих участках и диаграммы траекторий с меньшими углами излома. Р.А. Васин предположил, что данная диаграмма не зависит от траектории деформации и является **универсальной функцией материала**. Именно это обстоятельство и привело нас к идее разделения в уравнении для $\bar{\sigma}_p$. Нахождение зависимости $\theta_1(s)$ окончательно решает задачу калибровки функционала, определяет функцию $\sigma(s)$ и необратимые напряжения $\bar{\sigma}_p$. Вычисления $\sigma(s)$ показывают, что в момент излома траектории деформации начинается процесс разгрузки, а затем имеет место нагружение с повторным выходом в пластическую зону. В [3] подобные процессы изучались экспериментально, и полученные в настоящей работе результаты показывают их полное согласие с экспериментом.

2. Второй случай имеет отношение к пространственным траекториям деформации в E_3 . Рассматривается прямолинейное продолжение криволинейной плоской траектории в направлении, перпендикулярном плоскости траектории. В этом случае вычисления приводят к двум дифференциальным уравнениям для двух углов наклона направляющего вектора напряжений в пространственном репере Френе:

$$\frac{1}{\sin \theta_2} \left\{ \left(\frac{\dot{\theta}_1}{\sin^2 \theta_1} \right)' - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} \frac{1}{\sin^2 \theta_1} + \frac{\cos \theta_1 \cos \theta_2}{\sin \theta_1 \sin \theta_2} \left(\ddot{\theta}_2 - \dot{\theta}_2^2 \left(2 \frac{\cos \theta_2}{\sin \theta_2} + \frac{\sin \theta_2}{\cos \theta_2} \right) \right) \right\} = -\frac{1}{A^2(s)},$$

$$\left(\frac{\dot{\theta}_2}{\sin^2 \theta_2} \right)' = -\frac{1}{B^2(s)}.$$

Здесь A и B — известные функции длины дуги траектории деформации. В дифференциальное уравнение для вектора необратимых напряжений входит неизвестная метрика $\Sigma(s)$. Она выбирается из условия наличия в уравнении точки покоя.

3. В пятимерном процессе сложного нагружения увеличивается количество вычислений, но принципиальных сложностей нет. Основные уравнения (8) используются для определения функционалов Q, F, U, W через углы $\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4$, соотношения (9) — для вычисления $\sigma(s)$ при заданной функции $\Sigma(s)$ и (10) — для калибровки самих углов.

Во всех без исключениях случаях требуется дополнительное задание одной скалярной функции $\Sigma(s)$. Эта функция отвечает за реализацию принципа запаздывания векторных свойств материала. При вычислениях она бралась в виде затухающей экспоненты

$$\Sigma = \Sigma_0 \exp \left(-\frac{s}{\lambda} \right),$$

но чаще всего имела затухание на бесконечности, как $O(1/s)$.

4. Выводы. Предложенная и изученная здесь математическая модель процессов сложного нагружения по траекториям деформации любой размерности и сложности пригодна как для процессов активного нагружения, так и для разгрузки. Она решает проблему калибровки определяющих функционалов и сводит основную задачу к задаче определения одной скалярной функции-метрики $\Sigma(s)$. Даже грубое приближение этой функции оказалось приемлемым с точки зрения механики и физики. Предложенный подход и для наиболее простых двумерных процессов дал возможность точно (в рамках модели) определить ранее неизвестный вид экспериментальной зависимости Р.А. Васина. Отыскание необратимых напряжений позволяет решить задачу калибровки модели, а при использовании представлений (4) или более сложных в пространствах высокой размерности — точно сформулировать теорему изоморфизма А.А. Ильюшина. В нашем рассмотрении теорема изоморфизма устанавливает подобие геометрии траектории деформации и формы отклика. Первоначально обнаруженное при анализе экспериментов по сложному нагружению процессов с винтовыми траекториями деформаций [4], оно оказалось пригодным в случае спиральных траекторий, а также круговых и многих других. Данное исследование, а конкретно разделение напряжений на составные части за пределами следа запаздывания, как раз и приводит к такому соответствию.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ильюшин А.А.* Пластичность. М.: Изд-во АН СССР, 1963.
2. *Вавакин А.С., Васин Р.А., Викторов В.В., Широков Р.И.* Экспериментальное исследование упругопластического деформирования стали при сложном нагружении по криволинейным пространственным траекториям деформаций. Деп. в ВИНТИ 16.10.86. № 7298-В86. М., 1986.
3. *Зубчанинов В.Г.* Постулат изотропии и закон сложной разгрузки сплошных сред // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2011. № 1. 27–37.
4. *Молодцов И.Н., Бабаева Д.О.* Некоторые математические модели упругопластических процессов сложного нагружения // Интеллектуальные системы. Теория и приложения. 2018. **22**, вып. 2. 19–36.

Поступила в редакцию
06.09.2019

УДК 531.8

ЗАНОС КОЛЕСНОГО АППАРАТА НА “МИКСТЕ”

А. В. Влахова¹, А. П. Новодерова²

Рассматривается двухосный четырехколесный аппарат в начале движения на “миксте” — участке опорной плоскости с разными коэффициентами трения для левого и правого колес одной оси. В зависимости от условий движения взаимодействие колес аппарата с опорной плоскостью описывается моделью увода или моделью сухого трения Кулона. С использованием методов фракционного анализа и теории сингулярных возмущений получена оценка импульса угловой скорости, который приобретает корпус аппарата после завершения быстрого переходного процесса выравнивания контактных сил на колесах ведущей оси.

Ключевые слова: “микст”, занос колесного аппарата, фракционный анализ, теория сингулярных возмущений, модель кулонова трения, модель увода.

The dynamics of a biaxial four-wheeled vehicle is simulated when drive wheels of one of its axes get into the “ μ -split surface”. The “ μ -split surface” is a section of the reference plane with

¹ *Влахова Анастасия Владимировна* — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: vlakhova@mail.ru.

² *Новодерова Анна Павловна* — асп. каф. прикладной механики и управления мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: an.novoderova@yandex.ru.

Vlakhova Anastasiya Vladimirovna — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Applied Mechanics and Control.

Novoderova Anna Pavlovna — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Applied Mechanics and Control.

different friction coefficients for the left and right wheels of one of the vehicle axes. Depending on the conditions of vehicle motion, the interaction of its wheels with the reference plane is described by the slip model or the Coulomb dry friction model. Using the methods of fractional analysis and the theory of singular perturbations, we estimated the angular velocity impulse, which is obtained by the vehicle body after the completion of the aligning transient process of the contact forces on the wheels of the drive axis.

Key words: “ μ -split surface”, wheeled vehicle skidding, fractional analysis, theory of singular perturbations, Coulomb friction model, slip model.

1. Постановка задачи и математическая модель. Настоящая работа продолжает исследования [1], ориентированные на описание динамики автомобиля в случае, когда до и после попадания на “микст” его колеса взаимодействуют с дорогой посредством продольного и поперечного микропроскальзывания. С использованием тех же подходов обсуждается этот и другие случаи контакта колес с опорной плоскостью и проводится сравнение полученных результатов. Рассмотрим движение двухосного четырехколесного аппарата по горизонтальной плоскости. Как и в [1], пренебрегая влиянием деформаций подвески на его геометрию масс и движение, будем считать оси вращения колес фиксированными в его продольной плоскости симметрии, углы развала и схождения колес — равными нулю. Свяжем с опорной плоскостью неподвижную систему координат $Ox_0y_0z_0$, с центрами масс корпуса и колес аппарата — системы координат $Cxyz$ и $A_{ij}x_{ij}y_{ij}z_{ij}$ соответственно. Индексы i задают переднюю ($i = 1$) и заднюю ($i = 2$) оси, индексы j — левую ($j = 1$) и правую ($j = 2$) стороны по ходу движения аппарата; оси Oz_0 , Oz и $A_{ij}z_{ij}$ направлены по вертикали, ось Cx — вдоль продольной оси симметрии корпуса, оси $A_{ij}y_{ij}$ — по осям вращения колес (рис. 1). Положение аппарата определяется координатами X, Y точки C в системе координат $Ox_0y_0z_0$, углом Ψ поворота его корпуса вокруг оси Cz (углом курса) и углами Θ_{ij} поворота колес вокруг осей $A_{ij}y_{ij}$. Углы поворота передних колес относительно корпуса вокруг осей $A_{1j}z_{1j}$ полагаются равными нулю. Рассматривая случай, когда отношение массы колеса к массе аппарата мало, будем далее считать, что центр масс аппарата совпадает с точкой C .

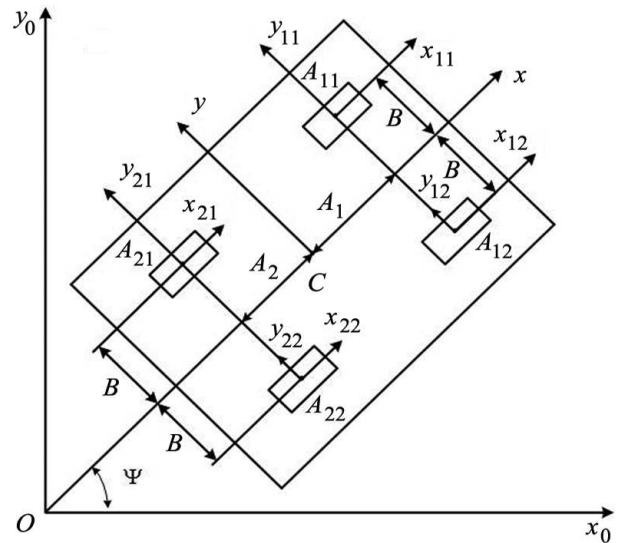


Рис. 1

Составим уравнения движения аппарата из уравнений изменения количества движения точки C в проекциях на оси Cx и Cy , уравнения изменения его кинетического момента относительно точки C в проекции на ось Cz , уравнений изменения кинетических моментов колес относительно осей $A_{ij}y_{ij}$ и необходимых кинематических соотношений [1]:

$$\begin{aligned}
 M\dot{V}_x &= P_{11x} + P_{12x} + P_{21x} + P_{22x} + MV_y\Omega_z - F_x, \\
 M\dot{V}_y &= P_{11y} + P_{12y} + P_{21y} + P_{22y} - MV_x\Omega_z + F_y, \\
 I_z\dot{\Omega}_z &= (-P_{11x} + P_{12x} - P_{21x} + P_{22x})B + (P_{11y} + P_{12y})A_1 - (P_{21y} + P_{22y})A_2 + M_z, \\
 I_i\dot{\Omega}_{ij} &= -P_{ijx}R + L_{ij} \quad (i, j = 1, 2), \\
 \dot{X} &= V_x \cos \Psi - V_y \sin \Psi, \quad \dot{Y} = V_x \sin \Psi + V_y \cos \Psi, \quad \dot{\Psi} = \Omega_z, \quad \dot{\Theta}_{ij} = \Omega_{ij}.
 \end{aligned}
 \tag{1}$$

Точкой обозначено дифференцирование по времени T ; M — масса аппарата; $I_z = M\rho_z^2$ и ρ_z — его момент инерции относительно оси Cz и радиус инерции; $I_i = m\rho_i^2$ — осевые моменты инерции колес; m и ρ_i — масса колеса и соответствующие радиусы инерции; R — радиус колес; A_i — расстояния от оси Cz до прямых $A_{i1}A_{i2}$; $2B$ — длины отрезков $A_{i1}A_{i2}$; P_{ijx} и P_{ijy} — проекции касательной составляющей контактной силы взаимодействия ij -го колеса с опорной плоскостью на оси $A_{ij}x_{ij}$ и $A_{ij}y_{ij}$; L_{ij} — моменты со стороны двигателя и тормозных колодок, приложенные к ij -му колесу по направлению оси $A_{ij}y_{ij}$; F_x , F_y и M_z — соответствующие проекции внешних возмущающих сил и моментов. При выбранном направлении движения далее будем полагать $V_x(0) > 0$. Как и в работах [1–6], в силу условия

$$m \ll M \tag{2}$$

при записи уравнения изменения кинетического момента аппарата не учитываются проекции кинетических моментов его колес.

Далее будем рассматривать [1] заднеприводной аппарат, для которого

$$L_{1j} = 0, \quad L_{2j} = L, \tag{3}$$

где L — момент на выходных осях дифференциала, и пренебрежем возмущениями F_y и M_z .

Уравнения системы двигатель–трансмиссия имеют вид

$$I\dot{\Omega} = M(\Omega, \eta) - \frac{2}{n}L, \quad \Omega = \frac{n}{2}(\Omega_{21} + \Omega_{22}), \tag{4}$$

где Ω — угловая скорость выходного вала двигателя; I — момент инерции этой системы, приведенный к выходному валу; n — передаточное число

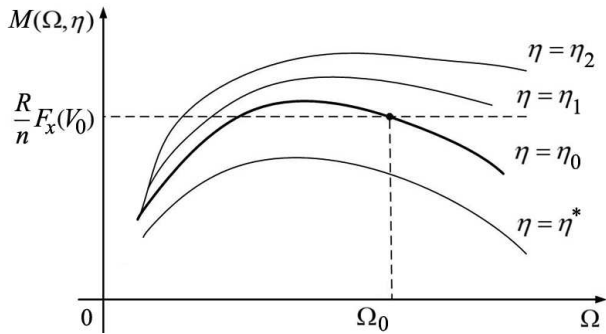


Рис. 2

трансмиссии от выходного вала двигателя к выходным осям дифференциала; $M(\Omega, \eta)$ — эффективный момент двигателя; η — параметр, характеризующий подачу топлива (приведенное положение педали газа). Графики зависимости $M(\Omega, \eta)$ от Ω при различных значениях параметра η ($\eta^* < \eta_0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots$) представлены на рис. 2 [1, 7].

Сила сопротивления воздуха F_x вычисляется по формуле

$$F_x(V_x) = \frac{1}{2}\rho V_x^2 S c_x, \tag{5}$$

где ρ — плотность воздуха ($\rho = 1,202 - 1,225$ кг/м³); c_x и S — безразмерный коэффициент лобового сопротивления и характерная площадь, зависящие от формы аппарата.

Для описания касательной составляющей контактной силы, действующей на ij -е колесо аппарата, будем использовать модель, которая, в отличие от традиционной модели увода [8], учитывает как поперечные, так и продольные деформации колес [1–4, 6, 9]:

$$\begin{aligned} P_{ijx} &= -\kappa_{ijx} N_{ij} p(\varepsilon_{ij}) \frac{\varepsilon_{ijx}}{\varepsilon_{ij}}, & P_{ijy} &= -\kappa_{ijy} N_{ij} p(\varepsilon_{ij}) \frac{\varepsilon_{ijy}}{\varepsilon_{ij}}, \\ \varepsilon_{ijx} &= \frac{U_{ijx}}{\Omega_{ij} R}, & \varepsilon_{ijy} &= \frac{U_{ijy}}{\Omega_{ij} R}, & \varepsilon_{ij} &= \sqrt{\varepsilon_{ijx}^2 + \varepsilon_{ijy}^2} \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned} \tag{6}$$

Здесь κ_{ijx} и κ_{ijy} — коэффициенты кулонова трения скольжения в продольном и поперечном направлениях относительно плоскости симметрии ij -го колеса (по осям $A_{ij}x_{ij}$ и $A_{ij}y_{ij}$); N_{ij} — нормальные реакции в точках контакта колес с опорной плоскостью; ε_{ijx} и ε_{ijy} — относительные проскальзывания колес в продольном и поперечном направлениях; U_{ijx} и U_{ijy} — проекции скорости точки контакта ij -го колеса с опорной плоскостью на оси $A_{ij}x_{ij}$ и $A_{ij}y_{ij}$ соответственно, вычисляемые по формулам

$$U_{ijx} = V_x + (-1)^j B \Omega_z - \Omega_{ij} R, \quad U_{ijy} = V_y - (-1)^i A_i \Omega_z. \tag{7}$$

Будем аппроксимировать [1] характеристику $p(\varepsilon_{ij})$ кусочно-линейной функцией

$$p = \varepsilon_{ij}/\varepsilon \text{ при } \varepsilon_{ij} < \varepsilon; \quad p = 1 \text{ при } \varepsilon_{ij} \geq \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1. \tag{8}$$

Для пневматических деформируемых колес $\varepsilon \sim 10^{-1}$, для стальных колес $\varepsilon \sim 10^{-2} - 10^{-3}$.

Интервал, определяемый первым неравенством (8) и соответствующий линейной зоне характеристики контактной силы, отвечает движению колес аппарата с малыми смещениями (микроскальзыванием), но без скольжения относительно опорной плоскости. Как и в [1–4, 6, 10], будем говорить, что при этом колеса не теряют сцепления с опорной плоскостью. Необходимым и достаточным условием такого движения служит неравенство

$$\left(\frac{P_{ijx}}{\kappa_{ijx} N_{ij}} \right)^2 + \left(\frac{P_{ijy}}{\kappa_{ijy} N_{ij}} \right)^2 < 1. \tag{9}$$

Второе неравенство (8) отвечает скольжению колес аппарата — их потере сцепления с опорной плоскостью. Здесь касательные составляющие контактных сил переходят в кулоновы силы трения скольжения.

Второе уравнение (4) позволяет исключить из системы (1), (3)–(8) одну из переменных Ω_{21} , Ω_{22} , Ω . Дифференцирование его обеих частей по времени и подстановка полученного выражения в первое уравнение (4) с учетом двух последних динамических уравнений (1) для $i = 2$ дают

$$L = \frac{1}{\frac{2}{n} + \frac{n}{I_2}} \left[M(\Omega, \eta) + \frac{n}{2} \frac{I}{I_2} R(P_{21x} + P_{22x}) \right], \quad \Omega = \frac{n}{2}(\Omega_{21} + \Omega_{22}). \quad (10)$$

Исключаемая переменная в каждом случае выполнения первого или второго неравенства (8) будет определяться удобством исследования.

Так же, как и в [1], разобьем исследование динамики аппарата на два этапа. На первом этапе, до попадания на “микст”, аппарат движется равномерно, прямолинейно, без потери сцепления колес с опорной плоскостью. На втором этапе рассматривается начальная стадия движения аппарата на “миксте”. В момент времени, который будет приниматься за начальный для этого этапа, коэффициент кулонова трения скольжения κ_{22} правого заднего (ведущего) колеса мгновенно изменяет свое значение с κ_0 на $\kappa_M < \kappa_0$. При этом стационарное, установившееся движение аппарата нарушается и в системе возникает динамический процесс, обусловленный различиями величин касательных составляющих контактных сил на его задних колесах. Рассматривая начальную стадию движения аппарата при попадании на “микст”, ограничимся случаем, когда поперечная и угловая скорости корпуса аппарата малы и изменяются в следующих диапазонах:

$$|V_y| \sim |\Omega_z|(A_1 + A_2) \lesssim \varepsilon V_x. \quad (11)$$

Изучая динамический процесс, выберем в качестве начальных условий соответствующие значения переменных для предыдущего этапа установившегося движения.

2. Движение аппарата до попадания на “микст”. На основании (1), (3)–(8), (10) равномерному прямолинейному (стационарному) движению аппарата без потери сцепления колес с опорной плоскостью отвечают соотношения

$$\begin{aligned} \kappa_{ij} = \kappa_0, \quad V_y = 0, \quad \Omega_z = 0, \quad U_{ijy} = 0, \quad \varepsilon_{ijy} = 0, \quad P_{ijy} = 0, \quad P_{1jx} = 0, \\ U_{1jx} = 0, \quad V_x = \Omega_1 R, \quad \Omega_1 = \Omega_{1j}, \quad P_{2jx} = L/R \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned} \quad (12)$$

В частности, из четвертого и восьмого соотношений следует, что при таком движении передние колеса не проскальзывают относительно опорной плоскости, задние (ведущие) колеса не проскальзывают в поперечном направлении.

Рассматривая аппараты с низким расположением центра масс, будем считать, что в ходе стационарного движения нормальные реакции принимают равные значения:

$$N_{ij} = N = Mg/4. \quad (13)$$

Первые уравнения (1) и (4) с учетом (6), первого равенства (8), двух последних соотношений (12) и формулы (13) дают шесть значащих соотношений

$$\begin{aligned} 0 = 2P_{2jx} - F_x(V_x), \quad -P_{2jx}R + nM(\Omega, \eta)/2 = 0, \\ P_{2jx} = -\kappa_0 N \frac{\varepsilon_{2jx}}{\varepsilon}, \quad \varepsilon_{2jx} = \frac{U_{2jx}}{\Omega_{2j}R}, \quad U_{2jx} = V_x - \Omega_{2j}R, \quad \Omega = n\Omega_{2j} \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \quad (14)$$

связывающих пять неизвестных переменных величин V_x , P_{2jx} , ε_{2jx} , Ω , Ω_{2j} и параметр η , где $F_x(V_x)$ вычисляется из (5). Тем самым эти переменные и параметр зависимы. Зафиксировав $V_x = V_0 = \text{const}$, получим

$$\begin{aligned} P_{2jx} = \frac{F_x(V_0)}{2}, \quad \varepsilon_{2jx} = -\frac{\varepsilon F_x(V_0)}{2\kappa_0 N} = \varepsilon_0, \quad \Omega_{2j} = \frac{V_0}{R(1 - \varepsilon_0)} = \Omega_2, \\ \Omega = n\Omega_2 = \Omega_0, \quad M(\Omega_0, \eta) = F_x(V_0)R/n \quad (j = 1, 2). \end{aligned} \quad (15)$$

Последнее равенство (15) позволяет найти значение параметра

$$\eta = \eta_0, \quad (16)$$

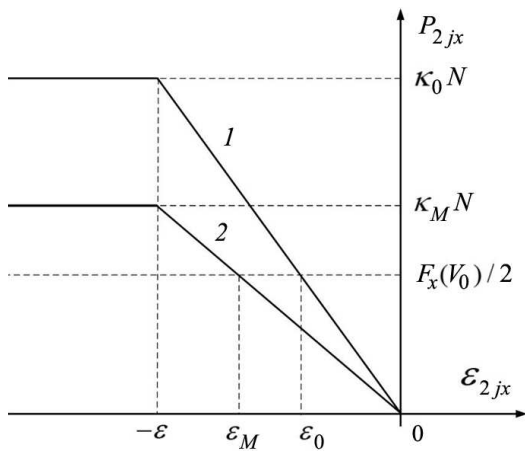


Рис. 3

В силу малости параметров ϵ и $\mu = m/M$ (см. (2) и (8)) составляющие ее движения развиваются в сильно разнесенных временных масштабах. Их оценками служат: $T_1 = V_{x^*}/g$ — определяемое из первого уравнения системы (1) характерное время изменения продольной скорости V_x корпуса аппарата под действием контактных сил; $T_2 = \epsilon V_{x^*}/g$ — определяемое из второго и третьего уравнений системы (1) с учетом (7), первого равенства (8) и ограничений (11) характерное время изменения поперечной и угловой скоростей корпуса аппарата V_y и Ω_z , а также поперечных скоростей U_{ijy} точек контакта колес с опорной плоскостью; $T_3 = \mu V_{x^*}/g$ — определяемое из четырех последних динамических уравнений системы (1) характерное время изменения угловой скорости осевого вращения колес; $T_4 = \mu \epsilon V_{x^*}/g$ — определяемое с учетом (8) характерное время изменения продольных скоростей U_{ijx} точек контакта колес с опорной плоскостью; $T_5 = I/K_D$, $K_D = (\partial M/\partial \Omega)_*$ — определяемое из (4) характерное время изменения угловой скорости выходного вала двигателя (правая часть выражения для K_D задает характерный коэффициент наклона касательной к характеристикам двигателя на рис. 2).

Далее ограничимся случаем

$$0 < \mu \ll \epsilon \ll 1, \tag{17}$$

когда

$$T_4 \ll T_3 \ll T_2 \ll T_1, \tag{18}$$

и будем рассматривать аппараты и условия движения, для которых $T_4 \sim T_5$. Таким образом, динамический процесс выравнивания контактных сил на ведущих колесах аппарата, возникающий при попадании одного из них на “микст”, в первую очередь затрагивает продольные скорости точки контакта этого (и остальных) колеса с опорной плоскостью, а также угловую скорость выходного вала двигателя, изменяющиеся на характерных временах $T \sim T_4 \sim T_5$. Переменные, изменяющиеся на существенно больших временах, можно считать [1, 2, 11, 12] постоянными, равными своим начальным значениям, отвечающим стационарному движению (12), (13), (15), (16), в частности $U_{22y} = 0$, $\Omega_{22} = \Omega_2$, $N_{ij} = N$. Тем самым в момент попадания правого заднего колеса на “микст” выражениями для проекций касательной составляющей контактной силы и для микропроскальзывания на этом колесе служат

$$P_{22x} = -\kappa_M N \frac{\epsilon_{22x}}{\epsilon}, \quad P_{22y} = 0, \quad \epsilon_{22x} = \frac{U_{22x}}{\Omega_2 R} = -\frac{\epsilon F_x(V_0)}{2\kappa_M N} = \epsilon_M, \quad \epsilon_{22y} = 0, \tag{19}$$

откуда в силу четвертого соотношения (14), а также второго и третьего равенств (15) следует, что продольная составляющая U_{22x} скорости точки контакта правого заднего колеса мгновенно изменяет значение с U_{22x_0} на U_{22x_M} , где

$$U_{22x_0} = \epsilon_0 \Omega_2 R, \quad U_{22x_M} = \epsilon_M \Omega_2 R. \tag{20}$$

На основании (9) и (19) условие сохранения сцепления правого заднего колеса с опорной плоскостью при попадании на “микст” имеет вид $F_x(V_0)/2 < \kappa_M N$. Значение ϵ_M может быть найдено графически как абсцисса точки пересечения графика $P_{2jx} = -\kappa_M N \epsilon_{22x}/\epsilon$ ($j = 2$) с горизонтальной прямой $P_{2jx} = F_x(V_0)/2$ (рис. 3, кривая 2).

соответствующее стационарному движению (12), (13), (15), (16). Это движение асимптотически устойчиво [1] в силу системы (1), (3)–(8), (10).

На рис. 2 значение η_0 отвечает ветви семейства графиков $M(\Omega, \eta)$, проходящей через точку $(\Omega_0, F_x(V_0)R/n)$. Согласно третьему соотношению (14) и второму равенству (15) значение ϵ_0 может быть найдено графически как абсцисса точки пересечения графика $P_{2jx} = -\kappa_0 N \epsilon_{2jx}/\epsilon$ ($j = 2$) с горизонтальной прямой $P_{2jx} = F_x(V_0)/2$ (рис. 3, кривая 1).

3. Движение аппарата на “миксте”. Все колеса сохраняют сцепление с опорной плоскостью. Для того чтобы выяснить, на какие переменные в наибольшей степени повлияет изменение коэффициента кулонова трения в этом случае, проведем оценку постоянных времени движения рассматриваемой системы.

Изучим динамику аппарата после попадания на “микст” с применением асимптотических методов разделения движений [2, 11, 12]. Для этого приведем систему (1), (3)–(8), (10) относительно избыточного набора динамических переменных $V_x, V_y, \Omega_z, \Omega_{11}, \Omega_{12}, \Omega_{21}, \Omega_{22}, \Omega$ к сингулярно возмущенной форме [12] с малыми параметрами при производных. В соответствии с методикой фракционного анализа [2, 11] перейдем от этого набора переменных к набору $V_x, V_y, \Omega_z, U_{11x}, U_{12x}, U_{21x}, U_{22x}$, включающему быстрые переменные. В силу (7) и последнего соотношения (14) имеем

$$\Omega_{ij} = \frac{1}{R} (V_x + (-1)^j B\Omega_z - U_{ijx}) \quad (i, j = 1, 2), \quad \Omega = \frac{n}{2R}(2V_x - U_{21x} - U_{22x}). \quad (21)$$

После указанных преобразований и учета упрощающих предположений рассматриваемая система принимает вид

$$\begin{aligned} M\dot{V}_x &= F_1, \quad M\dot{V}_y = F_2, \quad I_z\dot{\Omega}_z = F_3, \\ \dot{U}_{11x} &= \frac{1}{M}F_1 - \frac{B}{I_z}F_3 - \frac{R}{I_1}F_4, \quad \dot{U}_{12x} = \frac{1}{M}F_1 + \frac{B}{I_z}F_3 - \frac{R}{I_1}F_5, \\ \dot{U}_{21x} &= \frac{1}{M}F_1 - \frac{B}{I_z}F_3 - \frac{R}{I_2}F_6, \quad \dot{U}_{22x} = \frac{1}{M}F_1 + \frac{B}{I_z}F_3 - \frac{R}{I_2}F_7, \\ F_1 &= P_{11x} + P_{12x} + P_{21x} + P_{22x} - F_x(V_x), \quad F_2 = P_{11y} + P_{12y} + P_{21y} + P_{22y} - MV_x\Omega_z, \\ F_3 &= (-P_{11x} + P_{12x} - P_{21x} + P_{22x})B + (P_{11y} + P_{12y})A_1 - (P_{21y} + P_{22y})A_2, \\ F_4 &= -P_{11x}, \quad F_5 = -P_{12x}, \quad F_6 = -P_{21x} + L, \quad F_7 = -P_{22x} + L. \end{aligned} \quad (22)$$

Выражения (6), (7) для касательных составляющих контактных сил записываются в форме

$$\begin{aligned} P_{1jx} &= -\kappa_0 N \frac{U_{1jx}}{\varepsilon(V_x + (-1)^j B\Omega_z - U_{1jx})}, \quad P_{1jy} = -\kappa_0 N \frac{V_y + A_1\Omega_z}{\varepsilon(V_x + (-1)^j B\Omega_z - U_{1jx})}, \\ P_{21x} &= -\kappa_0 N \frac{U_{21x}}{\varepsilon(V_x - B\Omega_z - U_{21x})}, \quad P_{21y} = -\kappa_0 N \frac{V_y - A_2\Omega_z}{\varepsilon(V_x - B\Omega_z - U_{21x})}, \\ P_{22x} &= -\kappa_M N \frac{U_{22x}}{\varepsilon(V_x + B\Omega_z - U_{22x})}, \quad P_{22y} = -\kappa_M N \frac{V_y - A_2\Omega_z}{\varepsilon(V_x + B\Omega_z - U_{22x})} \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned} \quad (23)$$

Здесь $F_x(V_x)$ вычисляются из (5), N — из (13), L — из (10), где Ω задается последней формулой (21).

Проведем нормализацию [2, 11] системы (22), (23) на классе движения, определяемом условием (2), первым неравенством (8) и ограничениями (11), (17), заменив переменные и время их безразмерными аналогами:

$$\begin{aligned} T &= T_*t, \quad V_x = V_{x*}v_x, \quad V_y = V_{y*}v_y, \quad \Omega_z = \Omega_{z*}\omega_z, \quad U_{ijx} = U_{ijx*}u_{ijx}, \quad P_{ijx} = P_{ijx*}p_{ijx}, \\ P_{ijy} &= P_{ijy*}p_{ijy} \quad (i, j = 1, 2), \quad L = L_*l, \quad \Omega = \Omega_*\omega, \quad M(\Omega, \eta) = M_*m(\omega, \eta), \\ F_x &= F_{x*}f_x, \quad F_k = F_{k*}f_k \quad (k = 1, \dots, 7). \end{aligned} \quad (24)$$

Нижним индексом * помечены характерные значения соответствующих переменных. Будем рассматривать μ и ε в качестве малых параметров, которые далее будут устремлены к нулю, и выберем характерные значения следующим образом:

$$\begin{aligned} V_{y*} &= (A_1 + A_2)\Omega_{z*} = U_{ijx*} = \varepsilon V_{x*}, \\ \Omega_* &= MgR/K_D = V_{x*}/R, \quad P_{ijx*} = P_{ijy*} = F_{x*} = Mg, \quad L_* = M_* = MgR, \\ F_{1*} &= F_{2*} = Mg, \quad F_{3*} = Mg(A_1 + A_2), \quad F_{4*} = F_{5*} = F_{6*} = F_{7*} = MgR, \end{aligned} \quad (25)$$

ограничившись характеристиками двигателя, для которых

$$K_D \sim MgR^2/\sqrt{g(A_1 + A_2)},$$

т.е. $V_{x*} \sim \sqrt{g(A_1 + A_2)}$.

Рассматривая начальный этап заноса аппарата после попадания на “микст”, ограниченный характерными временами $T \sim T_2$ изменения переменных V_y и Ω_z , примем $T_* = T_2$. Нормализованным

аналогом системы (22), (23) служит сингулярно возмущенная система тихоновского вида [2, 11, 12] с малыми параметрами (17):

$$\begin{aligned} v'_x &= \varepsilon f_1, & v'_y &= f_2, & \omega'_z &= \frac{1}{i_z^2} f_3, \\ \mu u'_{11x} &= \mu f_1 - \mu \frac{b}{i_z^2} f_3 - \frac{1}{i_1^2} f_4, & \mu u'_{12x} &= \mu f_1 + \mu \frac{b}{i_z^2} f_3 - \frac{1}{i_1^2} f_5, \\ \mu u'_{21x} &= \mu f_1 - \mu \frac{b}{i_z^2} f_3 - \frac{1}{i_2^2} f_6, & \mu u'_{22x} &= \mu f_1 + \mu \frac{b}{i_z^2} f_3 - \frac{1}{i_2^2} f_7, \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= p_{11x} + p_{12x} + p_{21x} + p_{22x} - f_x(v_x), & f_2 &= p_{11y} + p_{12y} + p_{21y} + p_{22y} - \varepsilon v_x \omega_z, \\ f_3 &= (-p_{11x} + p_{12x} - p_{21x} + p_{22x})b + (p_{11y} + p_{12y})a_1 - (p_{21y} + p_{22y})a_2, \\ f_4 &= -p_{11x}, & f_5 &= -p_{12x}, & f_6 &= -p_{21x} + l, & f_7 &= -p_{22x} + l, & f_x(v_x) &= \rho v_x^2 S c_x (A_1 + A_2) / 2M, \\ l &= \frac{1}{\frac{2}{n} + n i_3^2} \left[m(\omega, \eta) + \frac{n}{2} i_3^2 (p_{21x} + p_{22x}) \right], & \omega &= \frac{n}{2} (2v_x - \varepsilon u_{21x} - \varepsilon u_{22x}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{A_1}{A_1 + A_2}, & a_2 &= \frac{A_2}{A_1 + A_2}, & b &= \frac{B}{A_1 + A_2}, & i_z &= \frac{\rho_z}{A_1 + A_2}, & i_1 &= \frac{\rho_1}{R}, & i_2 &= \frac{\rho_2}{R}, & i_3^2 &= \frac{I}{I_2}, \\ p_{1jx} &= -\frac{1}{4} \kappa_0 \frac{u_{1jx}}{v_x + (-1)^j \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{1jx}}, & p_{1jy} &= -\frac{1}{4} \kappa_0 \frac{v_y + a_i \omega_z}{v_x + (-1)^j \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{1jx}}, \\ p_{21x} &= -\frac{1}{4} \kappa_0 \frac{u_{21x}}{v_x - \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{21x}}, & p_{21y} &= -\frac{1}{4} \kappa_0 \frac{v_y - a_2 \omega_z}{v_x - \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{21x}}, \\ p_{22x} &= -\frac{1}{4} \kappa_M \frac{u_{22x}}{v_x + \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{22x}}, & p_{22y} &= -\frac{1}{4} \kappa_M \frac{v_y - a_2 \omega_z}{v_x + \varepsilon b \omega_z - \varepsilon u_{22x}} \quad (i, j = 1, 2). \end{aligned} \quad (27)$$

Штрихом обозначены производные по безразмерному времени t .

С учетом (24) нормализованные аналоги начальных условий для переменных $V_x, V_y, \Omega_z, U_{11x}, U_{12x}, U_{21x}$ в момент попадания на “микст”, которые равны своим значениям на этапе стационарного движения (12), (13), (15), (16), и нормализованные аналоги начальных значений переменных U_{21x} и U_{22x} , совпадающих с U_{21x_0} и U_{22x_M} из (20), принимают вид

$$\begin{aligned} v_x(0) &= v_0, & v_0 &= V_0/V_{x*}, & v_y(0) &= 0, & \omega_z(0) &= 0, & u_{11x}(0) &= u_{12x}(0) = 0, & u_{21x}(0) &= \varepsilon_0 \omega_2 / \varepsilon, \\ u_{22x}(0) &= \varepsilon_M \omega_2 / \varepsilon, & \omega_2 &= \Omega_2 R / V_{x*}, \end{aligned} \quad (28)$$

где V_0, Ω_2 и V_{x*} были определены при записи (15) и (25).

Проведя вырождение системы (26), (27) по малому параметру μ и считая параметр ε конечным, получим систему уравнений

$$v'_x = \varepsilon f_1, \quad v'_y = f_2, \quad \omega'_z = \frac{1}{i_z^2} f_3, \quad p_{1jx} = 0, \quad p_{2jx} = l = \frac{n}{2} m(\omega, \eta) \quad (j = 1, 2), \quad (29)$$

где выражения для правых частей дифференциальных уравнений, контактных сил и момента, приложенного к задним колесам аппарата, вычисляются при помощи формул (27), с учетом которых корнем первых двух конечных уравнений (29) служит

$$u_{11x} = u_{12x} = 0. \quad (30)$$

Получаемое из двух последних конечных уравнений системы (29) условие равенства контактных сил на колесах ведущей оси обусловлено тем, что на характерных временах $T \sim T_2$ процесс изменения переменных U_{21x} и U_{22x} , происходящий на временах $T \sim T_4$, уже завершен, т.е. контактные силы уравниваются дифференциалом, несмотря на разные коэффициенты κ_0 и κ_M кулонова трения скольжения (подробнее протекание этого процесса обсуждается ниже). Перейдем к отысканию корня указанных уравнений. Из условия $p_{21x} = p_{22x}$ с учетом (27) получаем равенство

$$u_{21x} = \frac{\kappa_M}{\kappa_0} u_{22x} + O(\varepsilon),$$

согласно которому выражение для ω может быть записано в виде

$$\omega = nv_x - \varepsilon \frac{n}{2} \left(\frac{\kappa_M}{\kappa_0} + 1 \right) u_{22x} + O(\varepsilon^2).$$

Подставив его в выражение для $m(\omega, \eta)$ из (27) и проведя разложение в ряд Тейлора по ε , получим

$$m(\omega, \eta) = m(nv_x, \eta) - \varepsilon \frac{n}{2} \left(\frac{\kappa_M}{\kappa_0} + 1 \right) \frac{\partial m}{\partial \omega} \Big|_{\omega=nv_x} u_{22x} + O(\varepsilon^2),$$

откуда с учетом выражений для p_{2jx} из (27) и двух последних конечных уравнений системы (29) следуют искомые выражения

$$u_{21x} = \frac{-2v_x n m(nv_x, \eta)}{\kappa_0} + O(\varepsilon), \quad u_{22x} = \frac{-2v_x n m(nv_x, \eta)}{\kappa_M} + O(\varepsilon). \tag{31}$$

Для доказательства близости решений исходной и вырожденной систем (26), (27) и (29) воспользуемся теорией Тихонова–Васильевой [2, 11, 12]. Исследуем изолированность, асимптотическую устойчивость по первому приближению и область влияния точек покоя присоединенной системы, получаемой из (26) путем замены времени $\tau = t/\mu$ и последующего приравнивания слагаемых порядка μ к нулю:

$$\frac{du_{1jx}}{d\tau} = \frac{1}{i_1^2} p_{1jx}, \quad \frac{du_{2jx}}{d\tau} = \frac{1}{i_2^2} (p_{2jx} - l) \quad (j = 1, 2). \tag{32}$$

Значения правых частей вычисляются из (27). Система (32) описывает движение аппарата на “малых” временах $T \sim T_4$. Медленные переменные v_x и v_y , ω_z , размерные аналоги которых изменяются на временах T_1 и T_2 , полагаются постоянными. Считая характерное время реакции водителя (системы управления) существенно превосходящим T_4 , значение η в (27) полагаем равным значению (16) в момент попадания на “микст”. Координаты (30), (31) точки покоя присоединенной системы найдутся из конечных уравнений (29).

Исследуем ее асимптотическую устойчивость по первому приближению. Проводя линеаризацию системы (32) около точки покоя и отбрасывая члены $O(\varepsilon)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta u_{11x}}{d\tau} &= -\frac{1}{4}\kappa_0 \frac{\Delta u_{11x}}{v_x}, & \frac{d\Delta u_{12x}}{d\tau} &= -\frac{1}{4}\kappa_0 \frac{\Delta u_{12x}}{v_x}, \\ \frac{d\Delta u_{21x}}{d\tau} &= \frac{1}{8i_2^2 v_x (2 + n^2 i_3^2)} \left(\Delta u_{21x} (-4\kappa_0 - n^2 i_3^2 \kappa_0) + \Delta u_{22x} n^2 i_3^2 \kappa_M \right), \\ \frac{d\Delta u_{22x}}{d\tau} &= \frac{1}{8i_2^2 v_x (2 + n^2 i_3^2)} \left(\Delta u_{21x} n^2 i_3^2 \kappa_0 + \Delta u_{22x} (-4\kappa_M - n^2 i_3^2 \kappa_M) \right), \end{aligned} \tag{33}$$

где Δu_{ijx} ($i, j = 1, 2$) – малые отклонения переменных u_{ijx} от точки покоя. Первые два уравнения системы (33) не связаны с последними и могут быть исследованы отдельно. Поскольку множитель при переменных Δu_{1jx} отрицателен, точка покоя (30) асимптотически устойчива в силу системы (33). Характеристическое уравнение системы двух последних уравнений (33)

$$\lambda^2 + \frac{(4 + n^2 i_3^2)(\kappa_0 + \kappa_M)}{8i_2^2 v_x (2 + n^2 i_3^2)} \lambda + \frac{\kappa_0 \kappa_M}{8i_2^4 v_x^2 (2 + n^2 i_3^2)} = 0 \tag{34}$$

имеет два различных вещественных отрицательных корня λ_1, λ_2 . Таким образом, точка, координаты которой определяются первыми слагаемыми правых частей (31), также асимптотически устойчива по первому приближению и является устойчивым узлом на фазовой плоскости u_{21x}, u_{22x} .

Исследование системы (33) показало, что в соответствии с теоремой Андронова–Понтрягина [13, 14] система (32) грубая: топологическая структура ее фазового портрета устойчива и не изменяется при малых изменениях правых частей. Таким образом, точка покоя (30), (31) асимптотически устойчива по первому приближению в силу аналога системы (33), учитывающего члены порядка ε .

Выясним область влияния этой точки покоя, образованную совокупностью начальных значений переменных u_{ijx} , для которых решение системы (32) стремится к (30), (31). Поскольку первые два уравнения системы (32) скалярные, они допускают качественное исследование методами [12].

Нетрудно видеть, что область влияния точки покоя по переменным u_{1jx} не ограничена. Для замкнутой системы двух последних уравнений (32), согласно критерию Бендиксона [14], положительностью коэффициента при первой степени λ характеристического уравнения (34) при $\varepsilon \rightarrow 0$ обеспечивается отсутствие предельных циклов на фазовой плоскости u_{21x}, u_{22x} . Точка покоя (31) единственна и асимптотически устойчива по первому приближению, следовательно, ее область влияния не ограничена.

В соответствии с теоремой Васильевой [2, 11, 12] рассогласование между решениями исходной системы (26), (27) и вырожденной системы (29) оценивается величиной $O(\mu)$ на конечном интервале времени $t \sim 1$, отвечающем интервалу $T \sim T_2$ размерного времени T . Для переменных u_{ijx} ($i, j = 1, 2$) эта оценка верна вне пограничного слоя шириной $O(-\mu \ln \mu)$.

Проведенное исследование показало, что (32) можно рассматривать как модель переходного процесса изменения продольных составляющих скоростей точек контакта до значений, близких к (30) и (31), и продольных составляющих контактных сил до близких друг другу значений, определяемых конечными уравнениями вырожденной системы. Тем самым на уровне точности системы (29) поперечное движение аппарата, определяемое переменными v_y и ω_z , не возмущается. Модель влияния переходного процесса на динамику аппарата можно построить при учете факторов следующего, первого по μ , порядка [1, 2, 11, 12].

Согласно алгоритму А.Б. Васильевой [12], при составлении приближенной модели, описывающей решение сингулярно возмущенной системы тихоновского вида на уровне точности $O(\mu)$, начальные условия по медленным переменным следует скорректировать членами порядка малого параметра. Для приближенной модели системы (26), (27) начальные условия по медленным переменным v_x и v_y, ω_z вместо (28) следует вычислять по формулам $v_x(0) = v_0 + \mu v_x^{(1)}(0)$, $v_y(0) = \mu v_y^{(1)}(0)$, $\omega_z(0) = \mu \omega_z^{(1)}(0)$,

$$v_x^{(1)}(0) = 0, \quad v_y^{(1)}(0) = 0, \quad \omega_z^{(1)}(0) = \frac{1}{i_z^2} \int_0^\infty (-p_{11x} + p_{12x} - p_{21x} + p_{22x}) b d\tau, \quad (35)$$

где интеграл берется по траекториям присоединенной системы (32); значение $\tau = 0$ отвечает моменту попадания на “микст” (началу переходного процесса), значение $\tau = \infty$ — окончанию переходного процесса. Механический смысл интеграла (35) — суммарный импульс момента, приложенного к корпусу аппарата по оси Cz за время $T \sim T_4$. Поскольку передние колеса аппарата на протяжении переходного процесса находятся в одинаковых условиях, справедливо равенство $p_{11x} = p_{12x}$, т.е. на этот импульс момента должны влиять только продольные составляющие контактных сил на задних колесах. Это нетрудно заметить и при помощи формул (27), (29) и (32), с учетом которых последнее выражение (35) и соответствующее подынтегральное выражение принимают вид

$$\omega_z^{(1)}(0) = \frac{1}{i_z^2} \int_0^\infty (p_{22x} - p_{21x}) b d\tau, \quad p_{22x} - p_{21x} = i_2^2 \frac{d}{d\tau} (u_{22x} - u_{21x}), \quad (36)$$

откуда

$$\mu \omega_z^{(1)}(0) = \mu \frac{i_2^2 b}{i_z^2} (u_{22x}(\infty) - u_{21x}(\infty) - (u_{22x}(0) - u_{21x}(0))). \quad (37)$$

Значения $u_{2jx}(0)$ и $u_{2jx}(\infty)$ ($j = 1, 2$) продольных составляющих скоростей точек контакта задних колес в начале и в конце переходного процесса определяются соответственно двумя последними выражениями (28) и выражениями (31) при $v_x = v_0$ и $\eta = \eta_0$.

В пренебрежении слагаемыми $O(\varepsilon)$ окончательной формой выражения (37) в размерных переменных служит

$$\mu \Omega_z^{(1)}(0) = \mu \left(\frac{\rho_2}{\rho_z} \right)^2 \frac{B}{R^2} \left(\frac{\varepsilon n V_0 M (n V_0, \eta_0) (\kappa_M - \kappa_0)}{2 R N \kappa_M \kappa_0} + (\varepsilon_0 - \varepsilon_M) \Omega_2 R \right). \quad (38)$$

Можно показать, что поправка, полученная в работе [1] при учете динамики двигателя, трансмиссии и колес аппарата

$$\mu \Omega_z^{(1)}(0) = \mu \left(\frac{\rho_2}{\rho_z} \right)^2 \frac{B}{R} (\Omega_{21}(\infty) - \Omega_{22}(\infty)), \quad (39)$$

совпадает с первым слагаемым правой части выражения (38). Таким образом, рассогласование между выражениями (38) и (39) имеет вид $\mu \left(\frac{\rho_2}{\rho_z}\right)^2 \frac{B}{R} (\varepsilon_0 - \varepsilon_M) \Omega_2$.

Приведем численные результаты для параметров и динамических характеристик автомобиля, которые, за исключением продольной скорости корпуса, взяты из [1]. Поправка (39) имеет порядок 10^{-2} рад/с. Оба слагаемых в правой части формулы (38) имеют одинаковые порядки (10^{-2} рад/с) и разные знаки. Таким образом, поправка угловой скорости корпуса аппарата, вычисленная по этой формуле, имеет порядок 10^{-3} рад/с. Для других, более легких и быстроходных колесных аппаратов выражение (38) может быть больше.

4. Движение аппарата на “миксте”. Колеса, за исключением правого заднего, сохраняют сцепление с опорной плоскостью. Рассмотрим случай, когда при попадании на “микст” правое заднее колесо аппарата теряет сцепление с опорной плоскостью, т.е. первое неравенство (8) нарушается для $i, j = 2$, а остальные колеса продолжают сохранять сцепление с ней: $\kappa_M N \leq F_x(V_0)/2 < \kappa_0 N$. Переменная U_{22x} теперь изменяется на временах $T \sim T_3$, т.е. в отличие от п. 3 здесь динамический процесс выравнивания контактных сил на ведущих колесах в первую очередь затрагивает переменные $U_{11x}, U_{12x}, U_{21x}$ и Ω , изменяющиеся на характерных временах $T \sim T_4 \sim T_5$, а остальные переменные, как и ранее, можно считать постоянными, равными своим значениям на этапе стационарного движения (12), (13), (15), (16). Тем самым в момент попадания правого заднего колеса на “микст” выражения для составляющих контактной силы на этом колесе имеют вид

$$P_{22x} = -\kappa_M N \operatorname{sgn} U_{22x}, \quad P_{22y} = 0.$$

Уравнения движения системы в новом наборе переменных $V_x, V_y, \Omega_z, U_{11x}, U_{12x}, U_{21x}, \Omega$, включающем быстрые переменные, получаются из (22) заменой последнего динамического уравнения динамическим уравнением изменения переменной Ω из (4).

Выражения для касательных составляющих контактных сил находятся из (23) после замены

$$P_{22x} = -\kappa_M N \frac{U_{22x}}{\sqrt{U_{22x}^2 + U_{22y}^2}}, \quad P_{22y} = -\kappa_M N \frac{U_{22y}}{\sqrt{U_{22x}^2 + U_{22y}^2}},$$

где U_{22y} вычисляется из (7), U_{22x} — из последнего равенства (21): $U_{22x} = 2V_x - U_{21x} - 2R\Omega/n$.

Проведем нормализацию [2, 11] этой системы, заменив переменные и время их безразмерными аналогами (24). В рассматриваемом случае класс движения аппарата определяется условиями (2), первым и вторым неравенствами (8) для $i = 1, 2, j = 1$ и $i, j = 2$ соответственно, а также ограничениями (11) и (17), характерные значения — из (25), где следует заменить U_{22x*} на V_{x*} .

Нормализованным аналогом рассматриваемой системы служит система (26), последнее уравнение которой следует заменить уравнением

$$\mu i_4^2 \omega' = m(\omega, \eta) - \frac{2}{n} l, \quad i_4^2 = \frac{T_5}{T_4} \cdot \frac{K_D V_{x*}}{MgR^2} \sim 1;$$

выражения для касательных составляющих контактных сил и момента, приложенного к задним колесам аппарата, находятся из (27) после замены

$$p_{22x} = -\frac{1}{4} \kappa_M \frac{u_{22x}}{\sqrt{u_{22x}^2 + \varepsilon^2 u_{22y}^2}}, \quad p_{22y} = -\frac{1}{4} \kappa_M \frac{\varepsilon u_{22y}}{\sqrt{u_{22x}^2 + \varepsilon^2 u_{22y}^2}}, \tag{40}$$

$$u_{22x} = 2v_x - \varepsilon u_{21x} - \frac{2}{n} \omega, \quad u_{22y} = v_y - a_2 \omega_z.$$

Начальные условия для переменных $v_x, v_y, \omega_z, u_{11x}, u_{12x}, u_{21x}$ в момент попадания на “микст” берутся равными своим значениям (28), начальное условие для ω определяется равенством $\omega(0) = \omega_0, \omega_0 = \Omega_0/\Omega_*$.

Проведя вырождение этой системы по малому параметру μ и считая параметр ε конечным, получим систему (29), где выражения для правых частей дифференциальных уравнений вычисляются при помощи (27) и (40). С учетом (7) и (10) корнем первых трех конечных уравнений вырожденной системы — аналогом (30) и первого выражения (31) — служит

$$u_{11x} = u_{12x} = 0, \quad u_{21x} = \frac{\kappa_M}{\kappa_0} v_x \operatorname{sgn} \left(v_x - \frac{\omega}{n} \right) + O(\varepsilon). \tag{41}$$

Решения $\omega_{M1} = \Omega_{M1}/\Omega_*$ и $\omega_{M2} = \Omega_{M2}/\Omega_*$ вырожденной системы по переменной ω отыскиваются из ее последнего конечного уравнения, которое может быть приведено к виду

$$m(\omega, \eta) = -\frac{1}{2n} \kappa_M \operatorname{sgn} u_{21x} + O(\varepsilon^2).$$

Например, при фиксированном η и $u_{21x} > 0$ значения Ω_{M1} и Ω_{M2} с погрешностью $O(\varepsilon^2)$ можно найти графически как абсциссы точек пересечения графика $M(\Omega, \eta)$ с горизонтальной прямой $M(\Omega, \eta) = 2\kappa_M NR/n$ (рис. 4).

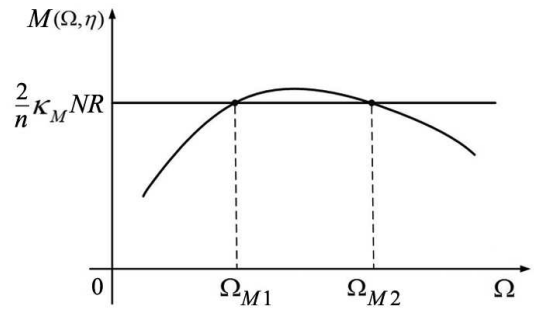


Рис. 4

Для доказательства близости решений исходной и вырожденной систем, как и в п. 3, воспользуемся теорией Тихонова–Васильевой [2, 11, 12]. Присоединенная система имеет вид

$$\frac{du_{1jx}}{d\tau} = \frac{1}{i_1^2} p_{1jx} \quad (j = 1, 2), \quad \frac{du_{21x}}{d\tau} = \frac{1}{i_2^2} (p_{21x} - l), \quad \frac{d\omega}{d\tau} = \frac{1}{i_4^2} \left(m(\omega, \eta) - \frac{2}{n} l \right), \quad (42)$$

где значения правых частей вычисляются из (27) и (40). Система (42) описывает движение аппарата на “малых” временах $T \sim T_4$. Медленные переменные v_x и v_y, ω_z, u_{22x} , размерные аналоги которых изменяются на временах T_1 и T_2 , полагаются постоянными. Координаты ее точек покоя определяются значениями (41) и значениями ω_{M1}, ω_{M2} — корнями конечных уравнений вырожденной системы. Как и для (33), первые два уравнения системы (42) не связаны с остальными и могут быть исследованы независимо.

Обозначив через $\Delta u_{1jx}, \Delta u_{21x}, \Delta \omega$ малые отклонения переменных u_{1jx}, u_{21x}, ω от точки покоя, разложив выражение для $m(\omega, \eta)$ в ряд Тейлора по $\Delta \omega$ с центром в точке $\omega = \hat{\omega}$, где $\hat{\omega} = \omega_{M1}$ или $\hat{\omega} = \omega_{M2}$:

$$m(\omega, \eta_0) = m(\hat{\omega}, \eta_0) + k_D \cdot \Delta \omega + O(\Delta \omega^2), \quad k_D = \partial m(\omega, \eta_0) / \partial \omega |_{\omega = \hat{\omega}},$$

проведя линеаризацию системы (42) около положения равновесия и отбросив члены $O(\varepsilon)$, получим систему

$$\begin{aligned} \frac{d\Delta u_{11x}}{d\tau} &= -\frac{1}{4} \kappa_0 \frac{\Delta u_{11x}}{v_x}, & \frac{d\Delta u_{12x}}{d\tau} &= -\frac{1}{4} \kappa_0 \frac{\Delta u_{12x}}{v_x}, \\ \frac{d\Delta u_{21x}}{d\tau} &= \frac{1}{8i_2^2 v_x (2 + n^2 i_3^2)} \left(-\Delta u_{21x} (4 + n^2 i_3^2) \kappa_0 + \Delta \omega \cdot 8v_x n k_D \right), & (43) \\ \frac{d\Delta \omega}{d\tau} &= \frac{i_3^2}{8i_4^2 v_x (2 + n^2 i_3^2)} \left(\Delta u_{21x} \cdot 2n \kappa_0 + \Delta \omega \cdot 8v_x n^2 k_D \right). \end{aligned}$$

Ввиду отрицательности множителя при переменных Δu_{1jx} точка покоя системы (42) по переменным u_{1jx} ($j = 1, 2$) асимптотически устойчива в силу системы первых двух уравнений (43). Для асимптотической устойчивости точки покоя системы двух последних уравнений (42) по первому приближению необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие положительности всех коэффициентов соответствующего характеристического полинома, которое обеспечивается при

$$k_D < 0. \quad (44)$$

Согласно этому неравенству и рис. 4 положение равновесия $\omega = \omega_{M1}$ неустойчиво, положение равновесия $\omega = \omega_M = \omega_{M2}$ асимптотически устойчиво по первому приближению.

При выполнении (44) точка покоя присоединенной системы — устойчивый узел или фокус на фазовой плоскости u_{21x}, ω ; в силу грубости системы (42) ее точка покоя асимптотически устойчива по первому приближению и для аналога системы (43), учитывающего члены $O(\varepsilon)$. Доказательство неограниченности области влияния точки покоя проводится по аналогии с доказательством в п. 3.

Поправки к начальным условиям по медленным переменным v_x, v_y, ω_z даются формулами (35), для вычисления последней из которых следует перейти к первой формуле (36), где с учетом (27) и (42) имеем

$$p_{22x} - p_{21x} = -2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{i_4^2 \omega}{n i_3^2} + i_2^2 u_{21x} \right).$$

Таким образом,

$$\mu\omega_z^{(1)}(0) = -\mu \frac{2i_2^2 b}{i_z^2} \left(u_{21x}(\infty) + \frac{i_4^2}{i_2^2 i_3^2 n} \omega(\infty) - \left(u_{21x}(0) + \frac{i_4^2}{i_2^2 i_3^2 n} \omega(0) \right) \right). \quad (45)$$

Согласно (15), (28), (41) и (44) значениями продольной составляющей скорости точки контакта левого заднего колеса и угловой скорости выходного вала двигателя в начале и в конце переходного процесса служат

$$u_{21x}(0) = \frac{\varepsilon_0 \omega_2}{\varepsilon}, \quad u_{21x}(\infty) = \frac{k_M}{k_0} v_0 \operatorname{sgn} \left(v_0 - \frac{\omega}{n} \right), \quad \omega(0) = \omega_0, \quad \omega_0 = \Omega_0 / \Omega_*, \quad \omega(\infty) = \omega_M.$$

Окончательная форма выражения (45) в размерных переменных имеет вид

$$\Omega_z^{(1)}(0) = 2\mu \frac{B}{R} \left(\frac{\rho_2}{\rho_z} \right)^2 \left(\varepsilon_0 \Omega_2 - \varepsilon \frac{\kappa_M}{\kappa_0} \frac{V_0}{R} \operatorname{sgn} \left(V_0 - \frac{R}{n} \Omega \right) + \frac{1}{n} (\Omega_0 - \Omega_M) \right). \quad (46)$$

Поправка угловой скорости корпуса, вычисленная по формуле (46) для параметров автомобиля из работы [1], является величиной 10^{-2} рад/с, что на порядок больше поправки (38) для случая п. 3, когда все колеса аппарата сохраняют сцепление с опорной плоскостью. Для более легких и быстроходных колесных аппаратов эта поправка может быть больше.

Проведенное исследование показало, что в случае сильного разнесения (18) постоянных времени T_2 , T_4 и малости областей контакта колес аппарата с опорной плоскостью при построении выражений (38) и (46) можно не учитывать возвращающие моменты в областях контакта колес, не теряющих сцепление с опорной плоскостью [15–17], и моменты трения верчения в областях контакта скользящих колес [18], поскольку они зависят от медленных переменных U_{ijy} и Ω_z соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новожиллов И.В., Павлов И.С., Фрольцов В.А. О поведении автомобиля на “миксте” // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2001. № 3. 61–67.
2. Влахова А.В. Математические модели движения колесных аппаратов. М.; Ижевск: АНО “Ижевский институт компьютерных исследований”, 2014.
3. Влахова А.В., Новожиллов И.В. О заносе колесного экипажа при “блокировке” и “пробуксовке” одного из колес // Фунд. и прикл. матем. 2005. 11, вып. 7. 11–20.
4. Влахова А.В., Новожиллов И.В., Смирнов И.А. Математическое моделирование заноса автомобиля // Вестн. Моск. ун-та. Матем. Механ. 2007. № 6. 44–50.
5. Влахова А.В., Новодерова А.П. О влиянии моментов трения верчения на занос колесного аппарата // Фунд. и прикл. матем. 2018. 22, вып. 2. 117–132.
6. Влахова А.В. О реализации связей в задачах качения колесного аппарата // Изв. РАН. Механ. твердого тела. 2013. № 3. 22–39.
7. Смирнов Г.А. Теория движения колесных машин. М.: Машиностроение, 1990.
8. Рокар И. Неустойчивость в механике. М.: ИЛ, 1959.
9. Расејка Н.В. Tyre and Vehicle Dynamics. Oxford: Butterworth-Heinemann, 2006.
10. Новожиллов И.В., Кручинин П.А., Магомедов М.Х. Контактные силы взаимодействия колеса с опорной поверхностью // Сб. научно-методических статей. Вып. 23. М.: Изд-во МГУ, 2000. 86–95.
11. Новожиллов И.В. Фракционный анализ. М.: Изд-во МГУ, 1995.
12. Васильева А.Б., Бутузов В.Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая школа, 1990.
13. Андронов А.А., Понтрягин Л.С. Грубые системы // Докл. АН СССР. 1937. 14, № 5. 245–251.
14. Андронов А.А., Витт А.А., Хайкин С.Э. Теория колебаний. М.: Физматлит, 1959.
15. Кручинин П.А. Сухое трение в модели качения деформируемого колеса // Сб. научно-методических статей. Вып. 30. М.: Изд-во МГУ, 2017. 139–147.
16. Кручинин П.А., Ласкин А.А. Стационарные режимы движения статически неустойчивого робота с двумя соосными деформируемыми колесами // Фунд. и прикл. матем. 2018. 22, вып. 2. 181–193.
17. Кручинин П.А., Ласкин А.А. О моделях качения деформируемого колеса при описании движения роботизированных платформ // VII Всерос. совещание-семинар заведующих кафедрами и преподавателей теоретической механики, робототехники, мехатроники вузов Российской Федерации: Мат-лы совещания / Под ред. В.А. Самсонова. Махачкала: Изд. центр “Мастер”, 2016. 62–65.

18. Андронов В.В., Журавлев В.Ф. Сухое трение в задачах механики. М.; Ижевск: Ин-т космич. исслед., НИЦ "РХД", 2010.

Поступила в редакцию
06.03.2019

УДК 531.01

О ДВИЖЕНИИ СИСТЕМЫ С ПЕРЕМЕЩАЮЩИМСЯ ВНУТРЕННИМ ЭЛЕМЕНТОМ ПРИ НАЛИЧИИ ВНЕШНЕГО ВЯЗКОГО ТРЕНИЯ

Е. И. Кугушев¹, Т. В. Попова², С. В. Сазонов³

Рассматривается система, состоящая из платформы, движущейся поступательно вдоль неподвижной прямой при наличии сил вязкого трения, и тела, совершающего относительно платформы за счет внутренних сил заданное поступательное движение вдоль той же прямой. В относительном движении величина скорости тела ограничена. Доказывается, что в случае линейного вязкого трения неограниченное смещение платформы в какую-либо сторону невозможно. В общем случае при некоторых условиях на силу вязкого трения величина скорости платформы ограничена. При этом если смещение платформы в какую-либо сторону, например вправо, не ограничено, то с ростом времени величина скорости платформы меняет свой знак бесконечное число раз, а общее время движения платформы влево и пройденный при этом путь стремятся к бесконечности.

Ключевые слова: вязкое трение, подвижная внутренняя масса, неограниченное перемещение.

We consider a system consisting of a translationally moving platform along a fixed line with viscous friction and a body committing a given translational motion relatively to the platform due to internal forces along the same line. In relative motion the value of the body velocity is limited. It is proved that, in the case of linear viscous friction, the unlimited displacement of the platform in any direction is impossible. In the general case under certain conditions imposed on the force of viscous friction, the velocity of the platform is limited. At the same time, if the displacement of the platform in any direction, for example to the right, is unlimited, then with the growth of time the value of the platform velocity changes its sign infinite number of times, and the total time of platform motion to the left and the path passed at the same time tend to infinity.

Key words: viscous friction, moving internal mass, unlimited movement.

1. Введение. Работа посвящена задаче перемещения в пространстве механических устройств за счет движения внутренних масс, обеспечиваемого внутренними силами. Такие перемещения могут стать возможными при наличии внешних сил трения. Устройства с подобного рода движителями представляют интерес при конструировании робототехнических систем, предназначенных для работ в агрессивных или опасных для людей средах. Первый вопрос, который приходится решать при разработке таких движителей, — это возможность или невозможность неограниченного перемещения устройства в пространстве. В работах [1–3] рассматривалась задача о движении в идеальной

¹ Кугушев Евгений Иванович — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: kugushev@keldysh.ru.

² Попова Татьяна Валентиновна — канд. физ.-мат. наук, доцент каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: t.shahova@yandex.ru.

³ Сазонов Сергей Вячеславович — студ. каф. теоретической механики и мехатроники мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: ssazonovs.v@gmail.com.

Kugushev Evgenii Ivanovich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

Popova Tatiana Valentinovna — Candidate of Physical and Mathematical Sciences, Associated Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

Sazonov Sergey Vyacheslavovich — Student, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Theoretical Mechanics and Mechatronics.

жидкости тела, содержащего внутри себя подвижную массу, задачи о движении тел под влиянием подвижных внутренних масс при наличии внешнего вязкого или сухого трения исследовались в работах [4–11].

В настоящей работе рассматривается одномерное движение системы, состоящей из двух твердых тел. Первое твердое тело (платформа) движется поступательно вдоль неподвижной прямой Ox при наличии сил вязкого трения. Внутри платформы по заданному закону совершает поступательное движение вдоль прямой Ox второе (внутреннее) тело. Считается, что это движение происходит за счет внутренних сил системы. Изучается вопрос: возможно ли подобрать такой закон относительного движения внутреннего тела, при котором платформа сместится в позицию, сколь угодно далекую от начальной? Задача рассматривается при условии ограниченности величины относительной скорости внутреннего тела.

2. Ограниченность величины скорости платформы. Положение платформы будем задавать координатой x ее центра масс S . Свяжем с платформой ось $S\xi$, направленную по оси Ox . Положение внутреннего тела относительно платформы будем задавать координатой ξ центра масс тела, причем закон движения этого центра масс задан: $\xi = \xi(t)$. Движение системы рассматривается при $0 \leq t < +\infty$. Считается, что на этом промежутке величина относительной скорости внутреннего тела ограничена:

$$|\dot{\xi}| \leq C \quad \text{при} \quad 0 \leq t < +\infty. \quad (1)$$

Здесь $C > 0$ — некоторая константа. С физической точки зрения следует предполагать, что относительное перемещение внутреннего тела также ограничено.

На платформу, движущуюся поступательно вдоль оси Ox , действует сила вязкого трения

$$\mathbf{F} = -f(v)\mathbf{e}_x. \quad (2)$$

Здесь $v = \dot{x}$ — величина (со знаком) скорости платформы, \mathbf{e}_x — направляющий вектор оси Ox , а $f(v)$ — функция, задающая зависимость величины силы вязкого трения от величины скорости платформы. Предполагается, что эта функция удовлетворяет неравенствам

$$f(v) > 0 \quad \text{при} \quad v > 0, \quad f(v) < 0 \quad \text{при} \quad v < 0 \quad (3)$$

и в любой ограниченной области выполняется условие Липшица с некоторой константой L :

$$|f(v_1) - f(v_2)| \leq L|v_1 - v_2|. \quad (4)$$

Заметим, что в этом случае $f(v)$ непрерывна и $f(0) = 0$.

Уравнение движения системы имеет вид

$$m_1\ddot{x} + m_2(\ddot{x} + \ddot{\xi}) = -f(\dot{x}),$$

где m_1 и m_2 — массы платформы и внутреннего тела соответственно. Введя обозначения

$$\varphi(v) = \frac{f(v)}{m_1 + m_2}, \quad g(t) = -\mu\dot{\xi}(t), \quad \mu = \frac{m_2}{m_1 + m_2}, \quad (5)$$

получим

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -\varphi(v) + \dot{g}(t). \quad (6)$$

Теорема 1. Пусть для закона относительного движения внутреннего тела и силы вязкого трения выполнены условия (1), (3), (4). Тогда при любых начальных условиях $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ величина скорости платформы ограничена:

$$|v(t)| \leq B \quad \text{при} \quad 0 \leq t < +\infty,$$

где $B > 0$ — константа, зависящая от начальных условий и закона относительного движения внутреннего тела.

Доказательство. Введя новую переменную $u = v - g(t)$, запишем второе уравнение в (6) в виде

$$\dot{u} = -\varphi(u + g(t)).$$

Из (1) имеем $|g(t)| \leq \mu C$. Тогда с учетом (3) и (5) получаем, что если $u > \mu C$, то $\dot{u} < 0$ и, значит, функция $u(t)$ убывает. Если $u < -\mu C$, то $\dot{u} > 0$ и, значит, $u(t)$ возрастает. Стало быть, если в какой-то момент времени t^* выполнено условие $|u(t^*)| \leq \mu C$, то и при всех $t > t^*$ будет выполнено условие $|u(t)| \leq \mu C$. Таким образом,

$$|u(t)| \leq B_1 = \max\{|u(0)|, \mu C\}.$$

Тогда

$$|v(t)| = |u(t) + g(t)| \leq B_1 + \mu C.$$

3. Линейное вязкое трение. В случае линейного вязкого трения $f(v) = cv$ ($c = \text{const} > 0$) уравнения (6) принимают вид

$$\dot{x} = v, \quad \dot{v} = -c^*v + \dot{g}(t), \quad (7)$$

где $c^* = \frac{c}{m_1 + m_2}$.

Теорема 2. Пусть для закона относительного движения внутреннего тела выполнено условие (1) и на платформу действует сила линейного вязкого трения. Тогда при любых начальных условиях $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ величина скорости платформы ограничена и смещение платформы ограничено:

$$|x(t)| \leq A, \quad |v(t)| \leq B \quad \text{при} \quad 0 \leq t < +\infty,$$

где $A > 0$, $B > 0$ — некоторые константы, зависящие от начальных условий и закона относительного движения внутреннего тела.

Доказательство. Для линейного вязкого трения выполнены условия (3), (4), поэтому в силу теоремы 1 при $0 \leq t < +\infty$ величина скорости платформы ограничена: $|v(t)| \leq B$, где $B > 0$ — константа, зависящая от начальных условий и закона относительного движения внутреннего тела.

Поскольку $g(t) = -\mu \dot{\xi}(t)$, то, интегрируя второе уравнение в (7) на отрезке от 0 до t , получаем

$$v(t) - v(0) = -c^*(x(t) - x(0)) - \mu(\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(0)).$$

Отсюда

$$|x(t) - x(0)| = \frac{1}{c^*} \left| v(t) - v(0) + \mu(\dot{\xi}(t) - \dot{\xi}(0)) \right|.$$

Слагаемые в правой части равенства ограничены. Следовательно, ограничена и величина $|x(t) - x(0)|$.

4. Пример неограниченного движения платформы. В соответствии с теоремой 2 неограниченное перемещение платформы невозможно в случае линейного вязкого трения. Рассмотрим нелинейное вязкое трение вида $\varphi(v) = e^v - 1$. Тогда второе уравнение в (6) примет вид

$$\dot{v} = -e^v + 1 + \dot{g}(t). \quad (8)$$

Выполнив замену $v = u + t + g(t)$ в этом уравнении, получаем $\dot{u} = -e^{u+t+g(t)}$ и находим общее решение уравнения (8):

$$v(t) = t + g(t) - \ln(b(t) + K),$$

где

$$b(t) = \int_0^t e^{s+g(s)} ds, \quad K = e^{g(0)-v(0)}. \quad (9)$$

Пусть

$$g(t) = b_1 + \ln(1 + b_2 \sin(t + b_3)), \quad (10)$$

где b_1, b_2, b_3 — некоторые константы, такие, что

$$0 < b_2 < 1, \quad g(0) = 0, \quad \int_0^{2\pi} g(t) dt = 0.$$

Имеем

$$b_1 = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \ln(1 + b_2 \sin \tau) d\tau, \quad b_3 = \arcsin \frac{e^{-b_1} - 1}{b_2}. \quad (11)$$

Функция $g(t)$ непрерывная, 2π -периодическая, и ее среднее на периоде равно нулю. Поэтому функция $\xi(t) = -\frac{1}{\mu} \int_0^t g(s) ds$ ограничена по модулю. Пусть в начальный момент $t = 0$ платформа покоится. Тогда

$$v(t) = t + g(t) - \ln(b(t) + 1). \quad (12)$$

Используя (9) и (10), имеем

$$b(t) = \int_0^t e^s e^{b_1} (1 + b_2 \sin(s + b_3)) ds = e^{b_1} \left(e^t - 1 + b_2 \int_0^t e^s \sin(s + b_3) ds \right).$$

Поскольку

$$\int_0^t e^s \sin(s + b_3) ds = \frac{1}{2} (e^t (\sin(t + b_3) - \cos(t + b_3)) - \sin b_3 + \cos b_3) \quad \text{и} \quad \sin b_3 = \frac{e^{-b_1} - 1}{b_2},$$

то

$$b(t) + 1 = e^{b_1} e^t \left(1 + \frac{b_2}{2} (\sin(t + b_3) - \cos(t + b_3)) + \frac{e^{-t} b_2}{2} (\sin b_3 + \cos b_3) \right).$$

Тогда согласно (12) получаем

$$v(t) = \ln(1 + b_2 \sin(t + b_3)) - \ln \left(1 + \frac{b_2}{2} (\sin(t + b_3) - \cos(t + b_3)) + \frac{e^{-t} b_2}{2} (\sin b_3 + \cos b_3) \right). \quad (13)$$

В силу (13) моменты времени, в которые скорость платформы равна нулю, определяются из уравнения

$$\sin \left(t + b_3 + \frac{\pi}{4} \right) = e^{-t} \sin \left(b_3 + \frac{\pi}{4} \right).$$

При $0 \leq t < +\infty$ на каждом отрезке времени длиной 2π это уравнение имеет два решения и величина скорости $v(t)$ меняет свой знак, поэтому платформа перемещается как вправо, так и влево. Оценим смещение платформы при малых b_2 . Полагая $\tau = t + b_3$ в (13), имеем

$$v(\tau) = \ln(1 + b_2 \sin \tau) - \ln \left(1 + \frac{b_2}{2} (\sin \tau - \cos \tau) + \frac{e^{-\tau} e^{b_3} b_2}{2} (\sin b_3 + \cos b_3) \right).$$

Согласно (11)

$$b_1 = O(b_2^2), \quad e^{-b_1} = 1 + O(b_2^2), \quad b_3 = O(b_2), \quad \sin b_3 = O(b_2), \quad \cos b_3 = 1 + O(b_2^2),$$

поэтому в первом приближении по b_2

$$v(\tau) = \frac{b_2}{2} (\sin \tau + \cos \tau) - \frac{e^{-\tau} b_2}{2} + O(b_2^2)$$

и смещение Δx_n платформы на отрезке времени $2\pi n \leq \tau \leq 2\pi(n + 1)$ ($n \in \mathbb{N}$) равно

$$\Delta x_n = \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} v(\tau) d\tau = -\frac{1}{2} e^{-2\pi n} (1 - e^{-2\pi}) b_2 + O(b_2^2).$$

Полное смещение платформы при $0 \leq t < +\infty$ равно $\sum_{n=0}^{\infty} \Delta x_n$, где $\Delta x_0 = \int_{b_3}^{2\pi} v(\tau) d\tau$. Значит, в первом приближении по b_2 платформа смещается влево и это смещение конечно, поскольку ряд $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi n}$ сходится. Во втором приближении по b_2 имеем

$$v(\tau) = \frac{b_2}{2}(\sin \tau + \cos \tau) - \frac{e^{-\tau} b_2}{2} - \frac{1}{2} b_2^2 \sin^2 \tau + \frac{1}{8} b_2^2 ((\sin \tau - \cos \tau)^2 + 2(\sin \tau - \cos \tau)e^{-\tau} + e^{-2\tau}) - e^{-\tau} k b_2^2 + O(b_2^3),$$

где k — константа, не зависящая от b_2 . Тогда смещение платформы на отрезке времени $2\pi n \leq \tau \leq 2\pi(n+1)$ ($n \in \mathbb{N}$) равно

$$\Delta x_n = \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} v(\tau) d\tau = -\frac{\pi b_2^2}{4} - e^{-2\pi n}(1 - e^{-2\pi})\left(\frac{b_2}{2} + k b_2^2\right) + \frac{b_2^2}{16} e^{-4\pi n}(1 - e^{-4\pi}) + O(b_2^3).$$

Ряды $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2\pi n}$ и $\sum_{n=1}^{\infty} e^{-4\pi n}$ сходятся. Поскольку $O(b_2^3) < K b_2^3$, где K — константа, не зависящая от b_2 , то при достаточно малых b_2 имеем $-\frac{\pi b_2^2}{4} + O(b_2^3) < -\frac{\pi b_2^2}{4} + K b_2^3 < -\frac{\pi b_2^2}{8}$. Значит, для таких b_2 при $n \rightarrow +\infty$ платформа неограниченно смещается влево.

Бесконечное количество изменений знака скорости $v(t)$ в случае неограниченного перемещения платформы в какую-либо сторону является общим свойством для нелинейного вязкого трения.

5. Нелинейное вязкое трение. Пусть сила вязкого трения задается равенством (2), причем функция $f(v)$ удовлетворяет условиям (3), (4) и условию

$$|f(v)| \geq c|v| \quad \text{при} \quad |v| \leq a. \quad (14)$$

Здесь $a > 0$, $c > 0$ — некоторые константы. Для любого $B > a$ при $a \leq |v| \leq B$ выполнено неравенство $|f(v)| \geq b(B)$, где

$$b(B) = \min_{a \leq |v| \leq B} |f(v)|.$$

Не нарушая общности, можно считать, что величины a , b , c связаны соотношением $ca = b$. Действительно, если $ca > b$, то следует уменьшить c до величины $c = \frac{b}{a}$, если $ca < b$, то увеличить a до величины $a = \frac{b}{c}$. Из (4) и (14) следует, что константа c и константа Липшица L связаны неравенством $c \leq L$.

Дадим несколько определений.

В момент времени $t = t^*$ платформа движется вправо, влево или покоится, если соответственно $v(t^*) > 0$, $v(t^*) < 0$ или $v(t^*) = 0$.

На отрезке $t_1 \leq t \leq t_2$ произошло переключение скорости, если $v(t_1) > 0$ и $v(t_2) < 0$ или, наоборот, $v(t_1) < 0$ и $v(t_2) > 0$.

Платформа неограниченно движется вправо, если найдется последовательность моментов времени $\{t_n\}$, такая, что $t_n \rightarrow +\infty$ и $x(t_n) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$. Аналогично если $t_n \rightarrow +\infty$ и $x(t_n) \rightarrow -\infty$ при $n \rightarrow +\infty$, то платформа неограниченно движется влево.

Теорема 3. Пусть для закона относительного движения внутреннего тела и силы вязкого трения выполнены условия (1), (3), (4), (14). Если при заданных начальных условиях $x(0) = x_0$, $v(0) = v_0$ платформа неограниченно движется вправо, то при $0 \leq t < +\infty$ мера отрезков времени, на которых платформа движется влево, бесконечна и суммарное смещение платформы влево на этих отрезках бесконечно. При этом число переключений скорости бесконечно. Для любого $t^* > 0$ на интервале $t^* < t < +\infty$ произойдет переключение скорости.

В случае неограниченного движения платформы влево выполняются аналогичные утверждения.

Доказательство. Поскольку выполнены условия (1), (3), (4), то в силу теоремы 1 величина скорости платформы ограничена:

$$|v(t)| \leq B \quad \text{при} \quad 0 \leq t < +\infty, \quad (15)$$

где $B > 0$ — константа, зависящая от начальных условий и закона относительного движения внутреннего тела. Не нарушая общности, можно считать, что $B > a$.

Из условий (4), (14) и (15) следует, что в любой момент времени выполняются неравенства

$$\begin{aligned} c_1 v(t) &\leq \varphi(v(t)) \leq c_2 v(t) && \text{при } v \geq 0, \\ c_2 v(t) &\leq \varphi(v(t)) \leq c_1 v(t) && \text{при } v < 0, \end{aligned} \tag{16}$$

где

$$c_1 = \min \left\{ \frac{c}{m_1 + m_2}, \frac{b(B)}{B(m_1 + m_2)} \right\}, \quad c_2 = \frac{L}{m_1 + m_2}.$$

Поскольку $c \leq L$, то $c_1 \leq c_2$. При $c_1 = c_2$ вязкое трение линейно и в соответствии с теоремой 2 неограниченное движение платформы невозможно. Поэтому можно считать, что $c_1 < c_2$.

Выберем любой момент $t^* > 0$ и разобьем отрезок $0 \leq t \leq t^*$ на три непересекающихся множества: D_0 — множество моментов времени, в которые $v(t) = 0$; D_1 — множество моментов времени, в которые $v(t) > 0$; D_2 — множество моментов времени, в которые $v(t) < 0$. В моменты $t \in D_0$ платформа покоится, в моменты $t \in D_1$ платформа движется вправо, в моменты $t \in D_2$ — влево. Из (16) следует, что

$$\varphi(v(t)) \geq c_1 v(t) \quad \text{при } t \in D_1, \quad \varphi(v(t)) \geq c_2 v(t) \quad \text{при } t \in D_2. \tag{17}$$

Пусть Δ_1 и Δ_2 — суммарные смещения платформы соответственно вправо и влево:

$$\Delta_1 = \int_{D_1} v dt, \quad \Delta_2 = \int_{D_2} v dt.$$

Полное смещение платформы за время t^* равно

$$x(t^*) - x(0) = \Delta_1 + \Delta_2. \tag{18}$$

Из (17) следует, что

$$\int_{D_1} \varphi(v) dt \geq c_1 \Delta_1, \quad \int_{D_2} \varphi(v) dt \geq c_2 \Delta_2. \tag{19}$$

Интегрируя второе уравнение в (6) на отрезке $0 \leq t \leq t^*$, находим

$$v(t^*) - v(0) = - \int_{D_1} \varphi(v) dt - \int_{D_2} \varphi(v) dt + g(t^*) - g(0).$$

Тогда

$$\int_{D_1} \varphi(v) dt + \int_{D_2} \varphi(v) dt = -[v(t^*) - v(0) + \mu(\dot{\xi}(t^*) - \dot{\xi}(0))].$$

Используя (19), получаем

$$c_1 \Delta_1 + c_2 \Delta_2 \leq -[v(t^*) - v(0) + \mu(\dot{\xi}(t^*) - \dot{\xi}(0))].$$

С учетом (18) имеем

$$c_1(x(t^*) - x(0)) + (c_2 - c_1)\Delta_2 \leq -[v(t^*) - v(0) + \mu(\dot{\xi}(t^*) - \dot{\xi}(0))],$$

откуда

$$-\Delta_2 \geq \frac{c_1(x(t^*) - x(0)) + v(t^*) - v(0) + \mu(\dot{\xi}(t^*) - \dot{\xi}(0))}{c_2 - c_1}.$$

В правой части этого неравенства все величины, кроме $x(t^*)$, ограничены. По условию платформа неограниченно движется вправо, т.е. $t_n \rightarrow +\infty$ и $x(t_n) \rightarrow +\infty$ при $n \rightarrow +\infty$. Следовательно, $\Delta_2(t_n) \rightarrow -\infty$. Поскольку функция $\Delta_2(t)$ монотонно убывает, то

$$\Delta_2(t) \rightarrow -\infty \quad \text{при } t \rightarrow +\infty. \tag{20}$$

Это означает, что при $0 \leq t < +\infty$ суммарное смещение платформы влево бесконечно. Величина скорости платформы ограничена, поэтому мера отрезков времени, на которых платформа движется влево, тоже бесконечна.

Докажем теперь, что число переключений скорости бесконечно и для любого $t^* > 0$ на интервале $t^* < t < +\infty$ произойдет переключение скорости. Допустим, что это неверно. Тогда найдется момент времени τ , такой, что при $t > \tau$ переключения скорости отсутствуют. По условию теоремы платформа неограниченно движется вправо, поэтому $v \geq 0$ при $t > \tau$. Значит, функция $\Delta_2(t)$ ограничена, что противоречит (20).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 18-01-00887).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Козлов В.В., Рамоданов С.М. О движении в идеальной жидкости тела с жесткой оболочкой и меняющейся геометрией масс // Докл. РАН. 2002. **382**, № 4. 478–481.
2. Козлов В.В., Онищенко Д.А. О движении в идеальной жидкости тела, содержащего внутри себя подвижную сосредоточенную массу // Прикл. матем. и механ. 2003. **67**, вып. 4. 620–633.
3. Ветчинин З.Е., Мамаев И.С., Тененев В.А. Движение тела с переменной геометрией масс в вязкой жидкости // Нелинейная динамика. 2012. **8**, № 4. 815–836.
4. Черноусько Ф.Л. О движении тела, содержащего подвижную внутреннюю массу // Докл. РАН. 2005. **405**, № 1. 56–60.
5. Черноусько Ф.Л. Анализ и оптимизация движения тела, управляемого посредством подвижной внутренней массы // Прикл. матем. и механ. 2006. **70**, вып. 6. 915–941.
6. Черноусько Ф.Л. Движение тела по плоскости под влиянием подвижных внутренних масс // Докл. РАН. 2016. **470**, № 4. 406–410.
7. Акуленко Л.Д., Болотник Н.Н., Кумакишев С.А., Нестеров С.В. Управление движением неоднородного цилиндра с подвижными внутренними массами по горизонтальной плоскости // Прикл. матем. и механ. 2006. **70**, вып. 6. 942–958.
8. Болотник Н.Н., Фигурин Т.Ю., Черноусько Ф.Л. Оптимальное управление прямолинейным движением системы двух тел в сопротивляющейся среде // Прикл. матем. и механ. 2012. **76**, вып. 1. 3–22.
9. Иванов А.П., Сахаров А.В. Динамика твердого тела с подвижными внутренними массами и ротором на шероховатой плоскости // Нелинейная динамика. 2012. **8**, № 4. 763–772.
10. Бардин Б.С., Панев А.С. О периодических движениях тела с подвижной внутренней массой по горизонтальной поверхности // Тр. МАИ. 2015. № 84. 1–25. (URL: <http://trudymai.ru/published.php?ID=62995>).
11. Голицына М.В. Периодический режим движения вибрационного робота при ограничении по управлению // Прикл. матем. и механ. 2018. **82**, вып. 1. 3–15.

Поступила в редакцию
18.09.2019

Краткие сообщения

УДК 519.766

КРИТЕРИЙ ПОДСТАНОВОЧНОСТИ ПАЛИНДРОМОВ ШТУРМА
И ОДНОМЕРНАЯ ФАКТОР-ДИНАМИКАИ. А. Решетников,¹ А. Я. Канель-Белов²

В статье приводятся критерий подстановочности симметричных, бесконечных в обе стороны слов Штурма и его доказательство, а также теорема о подстановочности фактор-динамики поворотов окружности.

Ключевые слова: слова Штурма, подстановочные слова, механические слова, динамические системы, поворот окружности, индукция Розы, символическая динамика, фактор-динамика.

The paper provides a criterion for substitution of symmetric Sturm words infinite on both sides and its proof, and a theorem on the substitution of factor dynamics of circle rotations.

Key words: Sturm's words, substitutive words, mechanical words, dynamical systems, circle rotation, Rausy induction, symbolic dynamics, factor dynamics.

1. Введение. Двусторонне-бесконечное слово w — это отображение $\mathbb{Z} \rightarrow A$, где A — алфавит слова w . Будем обозначать $w(n)$ через w_n .

Пусть есть символическая динамика (M, R_α, x_0, U) , где M — окружность; U — дуга угловой меры α (α иррациональное); R_α — функция эволюции, поворот на α относительно центра окружности (угловую меру всей окружности считаем единицей); x_0 — начальная точка, начало дуги α . Динамическая система (M, R_α) порождает некоторое бесконечное слово w — эволюцию точки x_0 . Такие слова называются механическими.

Двусторонне-бесконечное слово w называется *палиндромом*, если для любого $n \in \mathbb{Z}$ имеем $w_n = w_{-n}$ (палиндром, симметричный относительно буквы) или $w_n = w_{1-n}$ (палиндром, симметричный относительно середины слова).

Правосторонне-бесконечное слово w над алфавитом A называется *чисто подстановочным*, если оно представляется в виде $w = \varphi^\infty(a)$, где $a \in A$ — буква, а φ — подстановка, такая, что $\varphi(a) = aU$, где $U \in A^*$ непустое.

Слово w называется *подстановочным*, если получается из чисто подстановочного слова w' подстановкой h , примененной к слову w' : $w = h(w')$. Тогда $\varphi(\varphi(a)) = aU\varphi(U)$, $\varphi(\varphi(\varphi(a))) = aU\varphi((U\varphi(U))$ и т.д. Предельным переходом получаем $w = \varphi^\infty(a)$.

Понятия *подстановочности* и *чистой подстановочности слов, бесконечных в обе стороны*, вводятся аналогично с той лишь разницей, что для двусторонне-бесконечного подстановочного слова подстановка должна обладать свойством $\varphi(a) = Ua$ и $\varphi(b) = bW$. Тогда двусторонне-бесконечное слово w является конкатенацией левосторонне-бесконечного подстановочного слова (позиции от $-\infty$ до 0 включительно) и правосторонне-бесконечного подстановочного слова (позиции, большие нуля) и представимо в виде $w = \varphi^\infty(a|b)$.

Интерес представляет вопрос, будет ли фактор-динамика подстановочной системы подстановочна. Мы решаем этот вопрос для размерности 1 (мотивировки задач и подробности см. в [1–3]).

2. Индукция Розы. Метод индукции Розы [4] позволяет перейти от изучения некоторых механических слов к изучению цепных дробей. Его можно сформулировать следующим образом.

Пусть есть символическая динамика (M, R_α, x_0, U) , где M — окружность, U — дуга угловой меры α (α иррациональное), R_α — поворот на α относительно центра окружности (угловую меру

¹ Решетников Иван Андреевич — асп. каф. дискретной математики Физтех-школы прикладной математики и информатики МФТИ(ГУ), e-mail: reshetnikov.ivan@phystech.edu.

² Канель-Белов Алексей Яковлевич — доктор физ.-мат. наук, проф. каф. логики мех.-мат. ф-та МГУ; проф. МФТИ (ГУ), e-mail: kanelster@gmail.com.

Reshetnikov Ivan Andreevich — Postgraduate, Moscow Institute of Physics and Technology, Phystech School of Applied Mathematics and Informatics, Chair of Discrete Mathematics.

Kanel-Belov Aleksei Yakovlevich — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Logic.

всей окружности считаем единицей), или функция эволюции, x_0 — начальная точка, начало дуги α . Динамическая система (M, R_α) порождает некоторое бесконечное слово w — эволюцию точки x_0 .

Требование иррациональности числа α продиктовано периодичностью сдвигов на рациональный угол, тривиальный случай мы не разбираем.

Метод индукции Розы состоит в следующем. Мы преобразуем символическую динамику (M, R_α, x_0, U) в символическую динамику $(\tilde{M}, \tilde{R}_\alpha, \tilde{x}_0, \tilde{U})$ по следующим правилам.

1. Если $\alpha < \frac{1}{2}$, то в слове w после a всегда следует b . Поэтому слово w получается из слова \tilde{w} заменой $a \rightarrow ab; b \rightarrow b$. Возьмем \tilde{M} — окружность длиной $1 - \alpha$. Более наглядно: мы вырезаем из окружности M дугу длиной α (следующую за выделенной дугой U). Тогда слово \tilde{w} будет порождаться символической динамикой $(\tilde{M}, \tilde{R}_\alpha = R_\alpha, \tilde{x}_0 = x_0, U = \tilde{U})$.

2. Если же $\alpha > \frac{1}{2}$, то заменим a на b и наоборот. Для этого следует положить $\tilde{U} = M \setminus U$.

Можно заметить, что описанный алгоритм аналогичен алгоритму разложения α в цепную дробь. Таким образом, если α — квадратичная иррациональность (ее цепная дробь периодична), то в какой-то момент мы получим символическую динамику, эквивалентную уже встречавшейся, а значит, можем записать подстановку, с помощью которой можно получить слово w . Обозначим через φ композицию подстановок, образующих период, а через ψ композицию подстановок, образующих предпериод. Слово w представимо в виде $w = \psi \circ \varphi^\infty(a)$, т.е. подстановочно. Если же предпериод отсутствует, то слово w чисто подстановочное.

Если же α — не квадратичная иррациональность, то процесс не заикнется, но в любом случае можно будет изучать свойства цепной дроби α и соотносить их со свойствами слова w .

3. Критерий подстановочности палиндромных слов Штурма. Есть всего три двусторонне-бесконечных палиндрома, являющихся механическими словами параметра α . Это слова, отвечающие серединам дуг, и слово, получающееся из точки, которая при первом повороте переходит в точку, симметричную ей относительно оси симметрии динамической системы. Палиндромы, получающиеся из середин дуг, симметричны относительно своей буквы, а третий палиндром симметричен относительно середины слова.

3.1. *Аналог индукции Розы для палиндромов.* Докажем следующий критерий подстановочности палиндромов Штурма. Полагаем алфавит $A = \{0, 1\}$.

Критерий подстановочности палиндромов Штурма. Символическая динамика (M, R_α, x_m, U) , где x_m — середина дуги U длиной α на окружности M длиной 1, порождает подстановочный двусторонне-бесконечный палиндром p тогда и только тогда, когда α — квадратичная иррациональность.

Так как наше преобразование окружности обратимо, то можно говорить и о двусторонне-бесконечных словах, порождаемых символической динамикой, в частности о словах-палиндромах. Доказательство будет основано на сходстве некоторого алгоритма с индукцией Розы.

Доказательство. Необходимость: если слово p является подстановочным, то α — квадратичная иррациональность. Пусть подстановка φ порождает слово p . Пусть при действии порождающей подстановки φ 0 переходит в слово с a нулями и b единицами, а 1 переходит в слово с c нулями и d единицами. Тогда, так как p — неподвижная точка подстановки φ , а α — доля числа единиц, получаем квадратичное относительно α уравнение

$$\alpha = \frac{b(1 - \alpha) + d\alpha}{(a + b)(1 - \alpha) + (c + d)\alpha},$$

значит, α — квадратичная иррациональность.

Достаточность: если α — квадратичная иррациональность, то слово p подстановочно. Пусть есть бесконечное слово Штурма p — палиндром над алфавитом $\{0, 1\}$. Пусть в нем доля единиц равна α . Если нулей меньше, чем единиц, то сделаем подстановку $E : 0 \leftrightarrow 1$. Остается расписать действия алгоритма при $\alpha < \frac{1}{2}$. Так как p является словом Штурма и $\alpha < \frac{1}{2}$, то в нем не могут встретиться две единицы подряд. Возможно несколько случаев.

1. Слово p симметрично относительно 1. Будем относить 1 к левой половине слова p . Так как в слове p нулей больше, чем единиц, то перед каждой единицей идет нуль. Значит, слово p получается подстановкой $G : 1 \rightarrow 01; 0 \rightarrow 0$ из некоторого слова p' , причем подстановка подобрана так, что левая и правая части слова p получаются из левой и правой частей слова p' . Так как количество

нулей в каждой группе нулей уменьшилось на 1, а больше ничего не произошло, то слово p' также является палиндромом, симметричным относительно 1.

2. Слово p симметрично относительно 0. Будем относить 0 к левой половине слова p . Так как в слове p нулей больше, чем единиц, то после каждой единицы идет нуль. Значит, слово p получается подстановкой $\tilde{G} : 1 \rightarrow 10; 0 \rightarrow 0$ из некоторого слова p' . Левая и правая части слова p получаются соответственно из левой и правой частей слова p' . Количество нулей в каждой группе нулей уменьшилось на 1, поэтому слово p' также является палиндромом, но на этот раз симметричным относительно середины слова.

3. Слово p симметрично относительно середины слова. Тогда буквы w_0 и w_1 должны быть нулями; слово p получается подстановкой G из некоторого слова p' , при этом слово p' симметрично относительно нуля.

В нашем случае α — квадратичная иррациональность. При действии приведенного алгоритма α претерпевает такие же изменения, как и в индукции Розы, а значит, так как α — квадратичная иррациональность, то доля единиц α начиная с некоторого момента будет изменяться периодически. Для каждого α возможны лишь три варианта симметричности, три различных палиндрома. Поэтому возможно лишь конечное число пар (α, j) , где j — номер варианта симметричности. Для каждой пары однозначно определен переход согласно алгоритму к некоторой другой паре. Поэтому процесс и в общем случае также цикличен. Из цикличности процесса следует, что палиндром p подстановочен, как и в случае с обычной индукцией Розы. Критерий доказан.

4. Чистая подстановочность двусторонне-бесконечного палиндрома Фибоначчи–Штурма. Если мы предъядвим подстановку φ , оставляющую на месте слово w , такую, что $\varphi(a) = Ua$ и $\varphi(b) = bW$ для каких-то непустых слов U и W , то двусторонне-бесконечное слово w будет являться чисто подстановочным.

Утверждение. Если подстановка $\varphi : 0 \rightarrow 00101, 1 \rightarrow 001$ оставляет на месте палиндром w и обладает свойствами $\varphi(a) = Ua$ и $\varphi(b) = bW$, то двусторонне-бесконечный палиндром w , симметричный относительно 1 для $\alpha = \phi$ (здесь ϕ — золотое сечение), получается при помощи этой подстановки, т.е. $w = \varphi^\infty(1|0)$.

Доказательство. Данная подстановка φ получается композицией двух подстановок: $\varphi = \psi_2 \circ \psi_1$, где $\psi_1 : 0 \rightarrow 01, 1 \rightarrow 1$ и $\psi_2 : 0 \rightarrow 001, 1 \rightarrow 01$, каждая из которых сохраняет отношение количества нулей и единиц в слове, при этом отношение нулей и единиц такое же, как в слове Фибоначчи. Обе эти подстановки сохраняют свойство палиндромности. Первая подстановка увеличивает количество нулей в каждой группе нулей на 1, а значит, сохраняет палиндромность. Вторая порождает группы нулей, симметричные относительно точки симметрии слова. Подстановка ψ_1 слово, симметричное относительно 1, переводит в слово, симметричное относительно середины слова, а подстановка ψ_2 слово, симметричное относительно середины слова, переводит в слово, симметричное относительно 1. Так как такое сбалансированное слово только одно для данного отношения количеств нулей и единиц, то φ , переводящая слово, симметричное относительно 1, в слово, симметричное относительно 1, оставляет слово w без изменений, при этом оставляя неизменным отношение количеств 0 и 1. Утверждение доказано.

4.1. **Фактор-динамика прыжков по окружности.** Пусть есть динамическая система (M, R_α, x_0, U) . Фактор-динамика получается отождествлением точек, различающихся на $\frac{m}{n}$, где n фиксировано, а $m \in \mathbb{N}$. Такая обобщенная точка будет правильным n -угольником. Тогда попаданий в выделенную дугу может быть либо

$$k = \left[\frac{\alpha}{1/n} \right] = [n\alpha],$$

либо на 1 больше для каждой обобщенной точки. Будем писать a , если их $k+1$, и b иначе. Обозначим эту фактор-динамику через $(M/n, R_\alpha, x_0, U/n)$.

Теорема. Если слово w , порожденное символической динамикой (M, R_α, x_0, U) , подстановочное, то и слово w' , порожденное символической фактор-динамикой $(M/n, R_\alpha, x_0, U/n)$, подстановочное.

Доказательство. Заметим, что множество, получающееся факторизацией окружности по данному отношению эквивалентности, изоморфно окружности ω длиной $\frac{1}{n}$. При этом точки, при попа-

дании на которые мы пишем a (множество U'), образуют дугу α' длиной

$$\alpha' = \alpha - \frac{[n\alpha]}{n} = \alpha - \frac{k}{n}.$$

Поворот на угол α на окружности M отвечает повороту на угол $n\alpha$ на окружности ω . Увеличив длину окружности ω и длину дуги α' в n раз (сделаем гомотегию), получим соответственно символическую динамику $(M, R_{n\alpha}, x_0, U')$. Угол $n\alpha$ отличается от угла α' несколькими оборотами вокруг окружности, поэтому поворот на угол $n\alpha$ совпадает с поворотом на угол α' . Таким образом, мы получили стандартную символическую динамику поворотов окружности единичной длины на угол α' . Благодаря методу индукции Розы мы знаем, что слово является подстановочным тогда и только тогда, когда α — квадратичная иррациональность. Если слово w подстановочное, то α — квадратичная иррациональность, а значит, и α' — квадратичная иррациональность, поэтому слово w' также будет подстановочным. Теорема доказана.

Работа поддержана Российским научным фондом, грант № 17-11-01377.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Belov A. Ya., Kondakov G. V., Mitrofanov I.* Inverse problems of symbolic dynamics // Algebraic methods in dynamical systems. Dedicated to Michael Singer on his 60th birthday. Bedlewo, Poland, May 16–22, 2010. Vol. 94. Warszawa: Polish Academy of Sciences, Institute of Mathematics, Banach Center Publ., 2011. 43–60.
2. *Mitrofanov I.* On uniform recurrence of HD01 systems // arXiv:1111.1999.
3. *Мучник Ан. А., Притыкин Ю. Л., Семенов А. Л.* Последовательности, близкие к периодическим // Успехи матем. наук. 2009. **64**, № 5 (389). 21–96.
4. *Rauzy G.* Échanges d'intervalles et transformations induites // Acta Arithm. 1979. **34**. 315–328.

Поступила в редакцию
06.11.2019

УДК 519.157

НОВАЯ ФОРМУЛИРОВКА КРИТЕРИЯ МИНИМАЛЬНОГО ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ТЕМПА РОСТА

С. А. Комков¹

В работе получена новая формулировка критерия минимального логарифмического темпа роста для произвольного конечного множества с заданным множеством операций. Оказалось, что конечное множество с операциями имеет минимальный логарифмический темп роста тогда и только тогда, когда множество операций не содержится целиком ни в одном из предполных классов, отличных от классов сохранения подмножества и классов функций, сохраняющих предикаты, задающиеся перестановками, разлагающимися на циклы одной и той же простой длины.

Ключевые слова: темп роста, генерирующие множества, конечные множества.

A new formulation of a criterion of minimal logarithmic growth rate for an arbitrary finite set with a set of operations defined on it is obtained. It turns out that a finite set with operations has the minimal logarithmic growth rate if and only if the set of operation is not contained in any maximal class differing from autodual functions and functions preserving any subset.

Key words: growth rate, generating sets, finite sets.

1. Введение. Пусть имеется конечное множество A с множеством операций M . Элементы декартова произведения A^n будем называть наборами. Из любой k -местной операции $f \in M$ над элементами множества A , где $k \in \mathbb{N}$, можно получить k -местную операцию f^n над наборами, применяя операцию к наборам поэлементно.

¹ *Комков Степан Алексеевич* — асп. каф. математической теории интеллектуальных систем мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail: stepan.komkov@intsys.msu.ru.

Komkov Stepan Alekseevich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mathematical Theory of Intelligent Systems.

Таким образом, из множества M можно получить множество операций M^n над элементами A^n . В дальнейшем будем говорить, что над элементами A^n заданы операции M , подразумевая указанное множество M^n .

Набор a выводится из наборов $B = \{b^1, \dots, b^k\}$ с помощью операций из M , если $a = f(c^1, \dots, c^p)$, $f \in M$, где каждый набор c^i , $1 \leq i \leq p$, либо принадлежит множеству B , либо выводится из наборов B .

Подмножество $X \subseteq A^n$ называется генерирующим множеством для A^n по операциям из M , если любой набор из A^n выводится из наборов X с помощью операций из M . Генерирующее множество называется минимальным генерирующим множеством, если у него минимальная мощность среди всех генерирующих множеств.

Функция $d_F(n)$, где $F = (A, M)$, принимающая значения, равные мощностям минимальных генерирующих множеств для A^n по операциям из M , называется темпом роста.

Пример 1. Пусть $A = \{0, 1\}$, $M = \{\neg\}$. Тогда $d_F(n) = 2^{n-1}$.

Пример 2. Пусть $A = \{0, 1, 2\}$, $M = \{\oplus\}$. Тогда $d_F(n) = n$.

Функция $d_F(n)$ подробно изучена для классических конечных алгебраических структур [1–4]. Несколько работ посвящено исследованию темпа роста конечных множеств с произвольным множеством операций [5–7].

Ранее автором в [7] был доказан следующий критерий минимального логарифмического темпа роста.

Теорема 1. *Соотношение $d_F(n) - \log_{|A|} n = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда не найдется важного предиката $\rho \in \text{Inv}(M)$, причем если не нашлось важного предиката $\rho \in \text{Inv}(M)$, то $|d_F(n) - \log_{|A|} n| \leq |A| + 1$ для любого n .*

Здесь важным предикатом называется такой нетождественный предикат ρ без несущественных переменных, что $\rho(c, \dots, c) = 1$ для любого $c \in A$ и найдется столбец, принадлежащий предикату, который содержит не менее двух различных значений.

Предполные классы k -значной логики могут быть описаны как классы сохранения некоторых предикатов [8, 9]. Воспользуемся обозначениями из [9] для предикатов, задающих предполные классы.

Предикатами типа **Р** называются предикаты, задающиеся перестановками, разлагающимися на циклы одной и той же простой длины.

Предикатами типа **О** называются предикаты, определяющие на множестве A частичный порядок с наименьшим и наибольшим элементами.

Предикатами типа **Л** называются предикаты, задающие классы квазилинейных функций.

Предикатами типа **Е** называются предикаты, задающие нетривиальное отношение эквивалентности на A .

Предикатами типа **С** называются предикаты, задающие строго рефлексивное, строго симметричное отношение с нетривиальным центром на A . Одноместные предикаты типа **С** задают предполные классы, сохраняющие некоторое собственное подмножество множества A .

Предикатами типа **В** называются предикаты, задающие отношение λ_T , определяемое p -упорядоченным классом T эквивалентных отношений на A , где $p > 2$.

В настоящей заметке получена новая формулировка приведенного критерия в терминах функций, а именно

Теорема 2. *Соотношение $d_F(n) - \log_{|A|} n = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$ тогда и только тогда, когда множество M не вкладывается целиком ни в один из предполных классов функций, сохраняющих предикат типа **О**, **Л**, **Е**, **В** или предикат типа **С** арности не менее двух.*

2. Доказательство. Докажем необходимость. Допустим, что $d_F(n) - \log_k n = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$.

Если бы множество M содержалось в классе функций, сохраняющих предикат типа **О**, **Л**, **Е**, **В** или предикат типа **С** арности не менее двух, то в $\text{Inv}(M)$ содержался бы важный предикат, так как предикаты типа **О**, **Л**, **Е**, **В** и предикаты типа **С** арности не менее двух уже являются важными предикатами. Значит, множество M не может содержаться в данных предполных классах, поскольку тогда в $\text{Inv}(M)$ содержался бы важный предикат и это противоречило бы теореме 1.

Докажем достаточность. Допустим, что множество M не содержится в классе функций, сохраняющих предикат типа **О**, **Л**, **Е**, **В** или предикат типа **С** арности не менее двух, но при этом $d_F(n) - \log_k n \neq O(1)$ при $n \rightarrow \infty$. Тогда по теореме 1 существует важный предикат $\rho \in \text{Inv}(M)$.

Множество M можно так расширить до класса $\text{Pol}(\rho)$, а затем до предполного класса R , что $M \subseteq \text{Pol}(\rho) \subseteq R$. Все константные функции будут принадлежать классу R , так как все они принадлежат классу $\text{Pol}(\rho)$, а значит, R не может быть классом функций, сохраняющих предикат типа \mathbf{P} или одноместный предикат типа \mathbf{C} . Следовательно, множество M расширяется до предполного класса функций, сохраняющих предикат типа \mathbf{O} , \mathbf{L} , \mathbf{E} , \mathbf{B} или предикат типа \mathbf{C} а рности не менее двух, что противоречит предположению о том, что M не содержится в данных предполных классах, а значит, $d_F(n) - \log_k n = O(1)$ при $n \rightarrow \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Wiegold J.* Growth sequences of finite groups // J. Austral. Math. Soc. 1974. **17**, N 2. 133–141.
2. *Wiegold J.* Growth sequences of finite groups II // J. Austral. Math. Soc. 1975. **20**, N 2. 225–229.
3. *Wiegold J.* Growth sequences of finite groups III // J. Austral. Math. Soc. 1978. **25**, N 2. 142–144.
4. *Quick M., Ruškuc N.* Growth of generating sets for direct powers of classical algebraic structures // J. Austral. Math. Soc. 2010. **89**, N 1. 105–126.
5. *Zhuk D.* The size of generating sets of powers // J. Combin. Theory. Ser. A. 2019. **167**. 91–103.
6. *Комков С.А.* Мощности генерирующих множеств по операциям из классов решетки Поста // Дискретн. матем. 2018. **30**, № 1. 19–38.
7. *Комков С.А.* О классах функций многозначной логики с минимальным логарифмическим темпом роста // Дискретн. матем. 2019. **31**, № 3. 47–57.
8. *Rosenberg I.* Über die funktionale Vollständigkeit in den mehrwertigen Logiken // Pozprawy Ceskoslovensken Akad. Ved. 1970. **80**, N 3. 3–93.
9. *Марченко С.С.* Предполнота замкнутых классов в P_k : предикатный подход // Математические вопросы кибернетики. Вып. 6. М.: Наука, 1996. 117–132.

Поступила в редакцию
27.11.2019

УДК 510.362, 512.562

ОТОБРАЖЕНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ ОТНОШЕНИЯ, ОПРЕДЕЛИМЫЕ ЧЕРЕЗ ЛИНЕЙНЫЙ ПОРЯДОК

А. Л. Семенов¹

Отношения “между”, “цикл”, “зацепленность” были определены через отношение линейного порядка в классической работе Эдварда В. Хантингтона. В настоящей работе получены критерии сохранения этих отношений при инъективных отображениях.

Ключевые слова: линейный порядок, отношение “между”, отношение “цикл”, отношение “зацепленность”, автоморфизмы структур порядка, символическая динамика.

The relations “between”, “cycle”, “separation” were defined through the relation of linear order in the classical paper of Edward V. Huntington. In this paper, the criteria for preserving these relations under injective mappings are obtained.

Key words: linear order, “between” relation, “cycle” relation, “separation” relation, automorphisms of order structures, symbolic dynamics.

В теории динамических систем важную роль играют гомеоморфизмы окружности (см., например, [1]). В. С. Козякин [2] рассмотрел отображения окружности более общие, чем гомеоморфизмы,

¹ *Семенов Алексей Львович* — доктор физ.-мат. наук, проф., академик РАН, зав. каф. математической логики и теории алгоритмов мех.-мат. ф-та МГУ; директор Ин-та кибернетики и образовательной информатики им. А. И. Берга ФИЦ ИУ РАН; гл. науч. сотр. НИУ Моск. физ.-техн. ин-та, e-mail: alsemno@ya.ru.

Seменов Алексей Львович — Doctor of Physical and Mathematical Sciences, Professor, Academician of the Russian Academy of Sciences, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Head of Chair of Mathematical Logic and Theory of Algorithms; Director of Axel Berg Institute of Cybernetics and Educational Computing FRC CSC RAS; Principal Scientific Researcher, NRU Moscow Institute of Physics and Technology.

а именно сохраняющие циклический порядок, и установил, что это более общее свойство является достаточным для получения основных результатов о гомеоморфизмах, используемых в символической динамике. В настоящей работе рассматривается в некотором смысле исчерпывающий перечень такого рода обобщений и получено полное описание возникающих отображений.

Фиксируем $\langle A, < \rangle$ — линейно упорядоченное множество. Через порядок определимы отношения:
 B — “между”, а именно $xB(y, z)$ означает “ $y < x < z \vee z < x < y$ ”;
 C — “цикл”, а именно $C(x, y, z)$ означает “ $x < y < z \vee z < x < y \vee y < z < x$ ”;
 S — “зацеплено”, а именно $(x, y)S(z, t)$ означает “ $zB(x, y) \neq tB(x, y)$ ”.

Лемма 1. *Отношение S может быть определено через C : $(x, y)S(z, t)$ эквивалентно*

$$C(x, y, z) \neq C(x, y, t).$$

В работе [3] приведены полные системы аксиом для каждого из указанных отношений. В работе [4] доказано, что для всякой структуры, где задано какое-то из отношений, удовлетворяющих соответствующей системе аксиом, может быть “восстановлена” структура порядка. Рассматриваемым списком отношений исчерпываются все возможности для определения отношений через порядок для рациональных чисел (см., например, [5]).

Мы будем часто использовать следующее простое замечание.

Лемма 2. *Если x не лежит между a и b и x не лежит между a и c , то x не лежит между b и c .*

Определения. Мы говорим, что отображение $f: A \rightarrow A$ сохраняет отношение P , если $P(x, y, \dots) \Leftrightarrow P(f(x), f(y), \dots)$. Отображение, сохраняющее порядок, называется *возрастающим* (f *возрастает*). Отображение f , для которого $x < y \Rightarrow f(y) < f(x)$, называется *убывающим* (f *убывает*).

Сечением структуры $\langle A, < \rangle$ называется пара $\langle I_0, I_1 \rangle$ множеств, для которых выполнены следующие два условия:

- 1) $I_0 \cup I_1 = A$;
- 2) $\forall x \in I_0, y \in I_1 \quad x < y$.

Заметим, что случай, когда один из элементов сечения — пустое множество, не исключается. (Это позволяет упростить некоторые формулировки.) Будем называть I_0, I_1 *отрезками сечения*.

Будем говорить, что инъективное отображение $f: A \rightarrow A$ *сохраняет порядок отрезков I_0, I_1* , если $\forall x \in I_0, y \in I_1$ выполнено $f(x) < f(y)$; f *переставляет отрезки*, если $\forall x \in I_0, y \in I_1$ выполнено $f(x) > f(y)$. Если один из отрезков пуст, то f одновременно и сохраняет порядок отрезков, и переставляет их.

Теорема. *Пусть $f: A \rightarrow A$ — инъективное отображение. Тогда f*

(*B*) *сохраняет отношение B тогда и только тогда, когда f возрастает или убывает;*

(*C*) *сохраняет отношение C тогда и только тогда, когда для некоторого сечения $\langle I_0, I_1 \rangle$ множества $\langle A, < \rangle$ отображение f возрастает на I_0 и на I_1 и переставляет отрезки;*

(*S*) *сохраняет отношение S тогда и только тогда, когда для некоторого сечения $\langle I_0, I_1 \rangle$ множества $\langle A, < \rangle$*

(*S.1*) *f возрастает на I_0 и на I_1 и переставляет отрезки*
 или

(*S.2*) *f убывает на I_0 и на I_1 и сохраняет порядок отрезков.*

Доказательство. Будем обозначать через (x, y) интервал с концами x, y , при этом необязательно $x < y$.

(*B*) Проверка сохранения отношения B для возрастающих и убывающих отображений f очевидна.

Пусть теперь f сохраняет отношение B . Если в A меньше четырех элементов, то утверждение очевидно. Иначе рассмотрим любые четыре различных элемента A . В силу того что f сохраняет отношение “между”, два “средних” элемента четверки останутся средними, два “крайних” — “крайними” и после применения f . Далее, ясно, что и весь порядок элементов четверки после применения f будет определяться порядком “крайних” элементов и он сохранится или поменяется на противоположный. Значит, если на какой-то паре элементов f возрастает, то и на любой паре возрастает, если на какой-то убывает, то и на любой убывает. Отсюда получаем требуемое утверждение (*B*).

(*S*) Пусть f удовлетворяет условию, сформулированному в теореме в терминах сечения.

Пусть $a < c < b < d$ и выполнено $(a, b)S(c, d)$. Пусть далее, например, $a, c \in I_0, b, d \in I_1$. Тогда в случае (*S.1*) имеем $f(b) < f(d) < f(a) < f(c)$. В случае (*S.2*) имеем $f(c) < f(a) < f(d) < f(b)$. И в том

и в другом случае истинность S для образов очевидна. Остальные случаи также рассматриваются непосредственно.

Пусть f сохраняет отношение S . Если f сохраняет отношение B , то следует взять $I_0 = A$, $I_1 = \emptyset$, и утверждение вытекает из утверждения (B) теоремы.

Пусть теперь f не сохраняет отношение B . Тогда найдутся такие три элемента $a_0, a_1, b \in A$, что b лежит между a_0, a_1 , но $f(b)$ не лежит между $f(a_0)$ и $f(a_1)$. Тогда для любого c из сохранения отношения S вытекает равенство

$$\neg cB(a_0, a_1) \equiv (b, c)S(a_0, a_1) \equiv (f(b), f(c))S(f(a_0), f(a_1)) \equiv f(c)B(f(a_0), f(a_1)).$$

Таким образом, имеют место утверждения:

(*) для любого элемента c , лежащего между a_0, a_1 , его образ $f(c)$ не лежит между образами $f(a_0)$ и $f(a_1)$;

(**) для любого элемента c , не лежащего между a_0, a_1 , его образ $f(c)$ лежит между образами $f(a_0)$ и $f(a_1)$.

Иначе говоря, f осуществляет “инверсию A относительно отрезка (a_0, a_1) ”.

Будем далее полагать, что в наших обозначениях $a_0 < a_1$. Определим

$$I_0 = \{x | x < a_1 \wedge \neg f(a_1)B(f(a_0), f(x))\},$$

$$I_1 = \{x | x > a_0 \wedge \neg f(a_0)B(f(a_1), f(x))\}.$$

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

1. Очевидно из определения, что $a_0 \in I_0$ и $a_1 \in I_1$.

2. Проверим свойство 1 из определения сечения.

Пусть x лежит между a_0, a_1 . Тогда первые условия в конъюнкциях для множеств I_0 и I_1 выполнены. В силу “инверсии” (*) значение функции $f(x)$ не лежит между $f(a_0)$ и $f(a_1)$. Значит, ровно для одной пары различных $k, j \in \{0, 1\}$ элемент $f(a_k)$ не лежит между $f(a_j)$ и $f(x)$. Тем самым x принадлежит ровно одному из множеств I_0 и I_1 .

Пусть теперь x не лежит между a_0, a_1 . В силу “инверсии” (**) значение функции $f(x)$ лежит между $f(a_0), f(a_1)$. Значит, в определениях I_0 и I_1 второй член конъюнкции выполнен. Первый член конъюнкции выполнен ровно для одного из I_0 и I_1 .

Таким образом, $\langle I_0, I_1 \rangle$ — это разбиение A на два непересекающихся подмножества.

3. Возьмем любые $j \in \{0, 1\}$, $y, z \in I_j$ и любой элемент x , лежащий между y и z . Покажем, что $f(x)$ лежит между $f(y), f(z)$ и множество I_j не содержит посторонних включений.

Действительно, возьмем $k \neq j$. В силу первого условия в определении I_j элемент a_k не лежит между y, z и выполнено $(y, z)S(x, a_k)$. Согласно второму условию из определения I_j значение функции $f(a_k)$ не лежит между $f(a_j)$ и $f(y)$ и не лежит между $f(a_j)$ и $f(z)$. По лемме 2 значение функции $f(a_k)$ не лежит между $f(y)$ и $f(z)$. Поскольку f сохраняет зацепление S , имеем $(f(y), f(z))S(f(x), f(a_k))$. Следовательно, значение функции $f(x)$ лежит между $f(y)$ и $f(z)$.

Как мы уже установили, значение функции $f(a_k)$ не лежит между $f(y)$ и $f(a_j)$ и не лежит между $f(y)$ и $f(z)$, следовательно, значение функции $f(a_k)$ не лежит между $f(y)$ и $f(x)$. По лемме 2 значение функции $f(a_k)$ не лежит между $f(a_j)$ и $f(x)$, т.е. для x выполнен второй член конъюнкции в определении I_j . Первый член конъюнкции выполнен в силу выбора y, z , значит, $x \in I_j$.

4. Покажем, что $\forall x \in I_0 \ y \in I_1$ выполнено $x < y$. Из пп. 1 и 3 вытекает, что все x , меньшие a_0 , лежат в I_0 (иначе элемент a_0 лежал бы между каким-то элементом I_1 и a_1), аналогично все x , большие a_1 , лежат в I_1 . Для x, y , лежащих между a_0 и a_1 , если $x \in I_0$, $y \in I_1$, то отношение $x > y$ невозможно: если бы оно имело место, то элемент y из I_1 лежал бы между двумя элементами из I_0 , а именно между a_0 и x .

5. Из п. 3 и уже доказанного утверждения (B) теоремы вытекает, что f возрастает или убывает на I_0 и на I_1 (но априори возможно, что на одном из этих множеств f возрастает, а на другом убывает). Докажем, что такое “рассогласование” невозможно, т.е. что функция f возрастает на обоих множествах или убывает на обоих множествах.

Если $I_0 = \{a_0\}$ или $I_1 = \{a_1\}$, то f на этом I_k и возрастает, и убывает. Утверждение в этих случаях доказано. Поэтому далее мы считаем, что и в I_0 , и в I_1 более одного элемента. Достаточно в каждом из отрезков указать по два элемента так, чтобы на этих парах функция f вела себя “одинаково”. При этом используются свойства “инверсии” (*) и (**).

Пусть $f(a_0) < f(a_1)$. Мы покажем, что f убывает на каждом отрезке сечения.

Возьмем в I_0 произвольный элемент c , отличный от a_0 . В силу определения I_0 элемент c не может быть больше, чем a_1 . Если $c < a_0$, то ввиду утверждения (**), об “инверсии” значение $f(c)$ лежит между $f(a_0)$ и $f(a_1)$, в частности $f(a_0) < f(c)$. Таким образом, f убывает на паре c, a_0 и, значит, на I_0 . Если c лежит между a_0 и a_1 , то в силу утверждения (*) об “инверсии” значение $f(c)$ не может лежать между $f(a_0)$ и $f(a_1)$. В соответствии с определением I_0 значение $f(c)$ не может быть больше, чем $f(a_1)$, иначе значение $f(a_1)$ лежало бы между $f(a_0)$ и $f(c)$. Таким образом, $f(c) < f(a_0)$ и в этом случае f убывает на I_0 .

Для элементов I_1 рассуждение аналогично с заменой $<$ на $>$. Таким образом, f убывает и на I_0 , и на I_1 .

Аналогично доказывается, что если $f(a_0) > f(a_1)$, то f возрастает на каждом отрезке сечения.

(C) Пусть f возрастает на I_0 и на I_1 из некоторого сечения и $\forall x \in I_0, y \in I_1$ имеем $f(y) < f(x)$. Истинность отношения C (как и всех других рассматриваемых отношений) зависит только от отношений порядка между аргументами. Отношение $C(x, y, z)$ истинно на наборах, в которых $x < y < z$, или $z < x < y$, или $y < z < x$, второй и третий наборы получаются циклическими перестановками первого. Отображение f не меняет порядок аргументов, лежащих в одном компоненте сечения. Если ровно два элемента лежат в одном компоненте сечения, а третий — в другом, то f переставляет этот элемент с первого места на последнее или с последнего на первое, значит, сохраняет отношение C .

Пусть теперь f сохраняет цикл C . Поскольку зацепление определимо через цикл, f сохраняет и зацепление. Поэтому можно использовать утверждение (S) доказываемой теоремы и выбрать I_0, I_1 . Ясно, что случай (S.2) невозможен.

Третье утверждение теоремы и теорема в целом доказаны.

Примеры. Мы рассматриваем случай автоморфизмов зацепления, модификации для других отношений получаются легко.

Конечные структуры. Сечение “проходит” через любой элемент a : к I_0 относим все элементы, меньшие a , к I_1 — все элементы, не меньшие a . Всякая инъекция является автоморфизмом. Варианты (S.1) (“возрастание”) и (S.2) (“убывание”) возможны и однозначно определены точкой сечения.

Рациональные числа. Для множества всех рациональных чисел \mathbb{Q} (и изоморфного ему интервала $\mathbb{Q}(0; 1)$) “точка сечения” — произвольное иррациональное число. Образы элементов сечения могут разделяться произвольным иррациональным числом.

Для множества неотрицательных рациональных чисел (и изоморфного ему полуинтервала $\mathbb{Q}[0; 1)$) “точка сечения” — произвольное положительное рациональное число, в случае “возрастания” f эта точка лежит в I_1 , в случае “убывания” f — в I_0 . Образ нуля может быть произвольным положительным рациональным числом.

Для отрезка $\mathbb{Q}[0; 1]$ нетривиальных сечений нет.

Действительные числа. Для множества неотрицательных действительных чисел (и изоморфного ему полуинтервала $\mathbb{S}^1[0; 1)$) точка сечения может быть любым положительным числом (аналогично случаю рациональных чисел). Для такого упорядоченного множества теорема в случае (C) была доказана В. С. Козякиным в [2].

Для множества всех действительных чисел \mathbb{R} или отрезка $\mathbb{R}[0; 1]$ нетривиальных сечений нет.

Без требования взаимной однозначности отображения класс ситуаций расширяется.

Работа проведена при поддержке РФФИ, грант № 17-11-01377.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Каток А.Б., Хасселблат Б. Введение в современную теорию динамических систем / Пер. с англ. А. Кононенко при участии С. Ферлегера. М.: Факториал, 1999.
2. Козякин В. С. Штурмовы последовательности, генерируемые сохраняющими ориентацию отображениями окружности // Информ. процессы. 2005. 5, № 4. 271–282.
3. Huntington E. V. Inter-relations among the four principal types of order // Trans. Amer. Math. Soc. 1935. 38, N 1.
4. Adeleke S., Neumann P. M. Relations related to betweenness: their structure and automorphisms // Mem. Amer. Math. Soc. 1998. 131, N 623.
5. Semenov A., Soprunov S., Uspensky V. The lattice of definability. Origins, recent developments, and further directions // Lect. Notes Comput. Sci. (including subseries lecture notes in artificial intelligence and lecture notes in bioinformatics). Vol. 8476. Switzerland: Springer International Publishing, 2014.

Поступила в редакцию
06.11.2019

УДК 539.3+531.53+532.23

РЕЗОНАНСНЫЕ ЭФФЕКТЫ КОЛЕБАНИЙ ГАЗОВОГО ПУЗЫРЬКА В НЕВЯЗКОЙ И НЬЮТОНОВСКОЙ СРЕДАХ

А. У. Садрисламов¹

В статье построена линейная математическая модель вынужденных колебаний пузырька газа в вязкой ньютоновской жидкости. Найдена собственная частота колебаний газового пузырька. Проведен численный анализ резонансных эффектов колебаний газового пузырька в данной среде, а также выполнено сравнение полученных результатов с имеющимися классическими для невязкой среды.

Ключевые слова: резонанс, газовый пузырек, вязкость, нелинейные колебания, собственная частота.

A linear mathematical model of forced oscillations of a gas bubble in viscous Newtonian fluid is developed in this paper. The natural frequency of oscillations of the gas bubble is found. A numerical analysis of the resonant effects of gas bubble oscillations within the media is carried out and a comparison of the obtained results with the existing classical ones for non-viscous media is discussed.

Key words: resonance, gas bubble, viscosity, nonlinear oscillations, natural frequency.

1. Краткая история вопроса и постановка задачи. Задача о движении пузырька в сплошной среде под действием давления на бесконечности и давления газа внутри — одна из классических задач механики сплошной среды. Схлопывание вакуумного пузырька без начальной скорости в идеальной несжимаемой жидкости было изучено Дж. Рэлеем еще в 1917 г. [1]. Он показал, что скорость поверхности пузырька, направленная к его центру, неограниченно растет как $a^{-3/2}$ (a — радиальная координата поверхности пузырька, отсчитываемая от центра), т.е. по модулю стремится к бесконечности.

Задача о схлопывании вакуумного пузырька в вязкой жидкости впервые была исследована в [2]. В [3] получено приближенное асимптотическое решение в эйлеровых переменных, а также показано, что имеются два принципиально разных режима схлопывания: при числе Рейнольдса (напрямую зависящем от радиуса пузырька), большем критического, приближенно равного 8.4, происходит быстрое схлопывание, сопровождающееся неограниченной кумуляцией энергии; если же число Рейнольдса меньше критического, то заполнение пузырька происходит за бесконечное время. В [4] дано обобщение задачи Забабахина [3]: получено точное решение в лагранжевых переменных для сферического слоя несжимаемой вязкой жидкости, на внешней и внутренней поверхностях которого заданы давления, произвольным образом зависящие от времени. В случае, когда внешняя граница слоя жидкости удаляется в бесконечность и давление там постоянно, а давление внутри пузырька отсутствует (задача Забабахина), установлено, что при любом начальном радиусе пузырька его заполнение происходит за конечное время, причем при стремлении радиуса пузырька к нулю время схлопывания стремится к конечной величине, зависящей только от отношения динамической вязкости жидкости и давления на бесконечности. Скорость заполнения малых пузырьков стремится к нулю.

Влияние скалярно- и тензорно-нелинейных свойств среды, окружающей вакуумный или газовый пузырек, в частности наличие предела текучести, на динамику пузырька учтено в [5]. Большое количество теоретических результатов в динамике газового пузырька получено в предположении, что жидкость несжимаема. Однако в состоянии, близком к схлопыванию, скорость поверхности сравнима со скоростью звука в данной среде и эффектом сжимаемости пренебрегать неправомерно. Эффекты сжимаемости среды рассмотрены в [6].

Отметим исследования последних лет в области пузырьковой сонолюминесценции [7] — явления возникновения вспышки света при схлопывании кавитационных пузырьков в результате акустического воздействия на жидкость.

¹ Садрисламов Алмаз Уралович — асп. каф. механики композитов мех.-мат. ф-та МГУ, e-mail:almazneft@mail.ru.

Sadrislamov Almaz Uralovich — Postgraduate, Lomonosov Moscow State University, Faculty of Mechanics and Mathematics, Chair of Mechanics of Composite Materials.

В настоящей работе проводится численный анализ резонансных эффектов колебаний газового пузырька в вязкой ньютоновской среде и дается сравнение полученных результатов с имеющимися классическими для невязкой среды.

Рассмотрим эволюцию радиуса $a(t)$ сферического газового пузырька в несжимаемой вязкой среде под действием периодического давления на бесконечности $p_\infty(t)$. Предполагается, что давление среды изменяется по закону $p_\infty(t) = p_0 + \Delta p \cdot \sin(\omega t)$, где p_0 — статическое давление в среде; Δp , ω — амплитуда и частота колебаний, причем $\Delta p \ll p_0$. Примем газ баротропным, а процесс, происходящий при $r < a(t)$, политропным, так что давление p_g одинаково во всех точках $r < a(t)$ и связано с плотностью газа ρ_g политропой $p_g = p_g^0(\rho_g/\rho_g^0)^\gamma$, $\gamma > 0$, а с радиусом пузырька — соотношением $p_g = C/a^{3\gamma}$, где C — постоянная, характеризующая общую массу газа.

Положим, что центр пузырька O неподвижен и является центром сферической системы координат (r, θ, φ) , θ — полярный угол. Плотность ρ и динамическая вязкость μ не меняются при $r > a(t)$. В качестве базиса обезразмеривания выберем тройку $\{a(0), \rho, p_0\}$. Наряду с показателем политропы γ задача содержит три безразмерных управляющих параметра-константы

$$\text{Re} = \frac{a(0)\sqrt{\rho p_0}}{\mu}, \quad c = \frac{C}{(a(0))^{3\gamma} p_0}, \quad v_0 = \dot{a}(0)\sqrt{\frac{\rho}{p_0}}.$$

Все дальнейшие соотношения в работе выписаны в безразмерном виде.

Будем полагать, что движение среды в сферической системе координат, связанной с центром пузырька, радиальное ($v_\varphi = v_\theta = 0$). Из условий несжимаемости для радиальной компоненты скорости $v_r \equiv v(r, t)$ и для компонент $v_{rr}, v_{\theta\theta}, v_{\varphi\varphi}$ тензора скоростей деформации \tilde{v} получим

$$v = \frac{-V(t)}{r^2}, \quad v_{rr} = \frac{2V(t)}{r^3}, \quad v_{\theta\theta} = v_{\varphi\varphi} = -\frac{V(t)}{r^3}. \tag{1}$$

Имеем единственное уравнение движения

$$\frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r}(2\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta} - \sigma_{\varphi\varphi}) = \frac{\partial v_r}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \tag{2}$$

с граничными $\sigma_{rr}(\infty) = -1 + \varepsilon \sin(\omega t)$, $\varepsilon = \Delta p/p_0 \ll 1$, $\sigma_{rr}(a) = -\frac{c}{a^{3\gamma}}$ и начальными условиями $a(0) = 1$, $\dot{a}(0) = v_0$.

Проинтегрируем уравнение движения (2) по r в пределах от $a(t)$ до бесконечности с учетом (1), соотношения $V(t) = -a^2 \dot{a}$, следующего из (1) при $r = a(t)$, а также выписанных ранее граничных условий. Так как в сферически симметричном случае $\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$, получим

$$\frac{c}{a^{3\gamma}} - 1 + \varepsilon \sin(\omega t) + 2 \int_a^\infty \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} dr = a\ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2. \tag{3}$$

Выпишем также определяющие соотношения для линейной вязкой жидкости. Тензорное определяющее соотношение (модель вязкой жидкости Ньютона) записывается в общем виде как

$$\tilde{\sigma} = -p\tilde{I} + \frac{2}{\text{Re}} \tilde{v}.$$

При ограничениях (1) на кинематику найдем, что ненулевые напряжения связаны с функцией $V(t)$ следующим образом:

$$\sigma_{rr} = -p + \frac{4V}{r^3 \text{Re}}, \quad \sigma_{\theta\theta} = -p - \frac{2V}{r^3 \text{Re}}. \tag{4}$$

Подставим (4) в (3) и после некоторых преобразований будем иметь

$$a\ddot{a} + \frac{3}{2} \dot{a}^2 = -\frac{4\dot{a}}{a \text{Re}} + \frac{c}{a^{3\gamma}} - 1 + \varepsilon \sin(\omega t). \tag{5}$$

Заметим, что первое слагаемое в правой части (5) пропорционально вязкости среды. Уравнение для идеальной среды будет отличаться только тем, что оно не содержит данного слагаемого.

2. Собственные колебания и линеаризация относительно собственных колебаний. Рассмотрим собственные колебания газового пузырька, находящегося в линейной вязкой жидкости. Для этого в (5) положим $\varepsilon = 0$, а радиус пузырька $a(t)$ представим в виде суммы радиуса равновесия $a_0 \equiv 1$ и малого отклонения $\Delta a(t)$ от радиуса равновесия a_0 :

$$a(t) = a_0 + \Delta a(t). \quad (6)$$

Подставляя (6) в (5) и проводя линеаризацию относительно радиуса равновесия a_0 , получим линеаризованное уравнение собственных колебаний:

$$\Delta \ddot{a} + \frac{4}{\text{Re}} \Delta \dot{a} + 3\gamma c \Delta a = 0. \quad (7)$$

Рассмотрим случай, когда дискриминант характеристического многочлена уравнения (7) меньше нуля, т.е. наблюдаются затухающие колебания. Тогда собственная частота колебаний газового пузырька в линейной вязкой жидкости равна

$$w_0 = \sqrt{3\gamma c - \frac{4}{\text{Re}^2}}. \quad (8)$$

Далее представим радиус газового пузырька в виде суммы известного режима, а именно собственных колебаний с частотой (8) и вынужденных колебаний, вызванных воздействием внешнего периодического давления $p_\infty(t)$:

$$a(t) = a_0(t) + \varepsilon \Delta a(t), \quad (9)$$

где $a_0(t)$ — собственные колебания, $\Delta a(t)$ — вынужденные колебания, $\varepsilon = \Delta p/p_0 \ll 1$ — асимптотически малый параметр задачи.

Подставляя (9) в (5) и раскладывая нелинейные зависимости в ряд Тейлора в окрестности собственных колебаний с сохранением только линейных частей разложения, последующим вычитанием исходного уравнения собственных колебаний из (5) получим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} a_0 \ddot{a}_0 + \frac{3}{2} \dot{a}_0^2 + \frac{4\dot{a}_0}{a_0 \text{Re}} - \frac{c}{a_0^{3\gamma}} + 1 = 0, \\ a_0 \Delta \ddot{a} + \left(3\dot{a}_0 + \frac{4}{a_0 \text{Re}} \right) \Delta \dot{a} + \left(\ddot{a}_0 - \frac{4\dot{a}_0}{a_0^2 \text{Re}} + \frac{3\gamma c}{a_0^{3\gamma+1}} \right) \Delta a + \sin(wt) = 0 \end{cases} \quad (10)$$

со следующими начальными условиями:

$$a_0(0) = 1, \quad \dot{a}_0(0) = v_0, \quad \Delta a(0) = 0, \quad \Delta \dot{a}(0) = 0.$$

В данной системе решением первого дифференциального уравнения являются собственные колебания $a_0(t)$, второго — вынужденные колебания $\Delta a(t)$, причем в каждый момент времени уравнение вынужденных колебаний должно пересчитываться в соответствии с решением первого уравнения. Также стоит отметить, что полученная таким образом линейная модель вынужденных колебаний $\Delta a(t)$ газового пузырька справедлива лишь при малых отклонениях границы пузырька от исходного режима, т.е. при $\varepsilon \Delta a(t) \ll 1$.

3. Результаты численного анализа. Систему, описывающую резонансные колебания газового пузырька, легко получить из (10), подставив вместо частоты внешнего периодического давления w собственную частоту (8). Полагая же в полученной системе $\text{Re} = \infty$, приходим к системе уравнений, описывающей резонансные колебания газового пузырька в идеальной среде.

Результаты численного анализа полученных систем линейных дифференциальных уравнений представлены на рис. 1, 2. На первом из них изображены собственные колебания газового пузырька в идеальной среде (а) и в линейной вязкой жидкости (б). Из графиков видно, что в случае идеальной среды амплитуда колебаний остается неизменной в течение всего отрезка времени, в случае же вязкой среды колебания затухают, что является ожидаемым для среды, обладающей вязкостью.

На рис. 2 изображены вынужденные колебания газового пузырька для двух типов сред. В обоих случаях колебания монотонно возрастают, однако в отличие от идеальной среды, где колебания возрастают неограниченно, амплитуда колебаний в вязкой среде ограничена. Величина предельной амплитуды зависит от вязкости данной среды или (в безразмерных параметрах) от числа Рейнольдса.

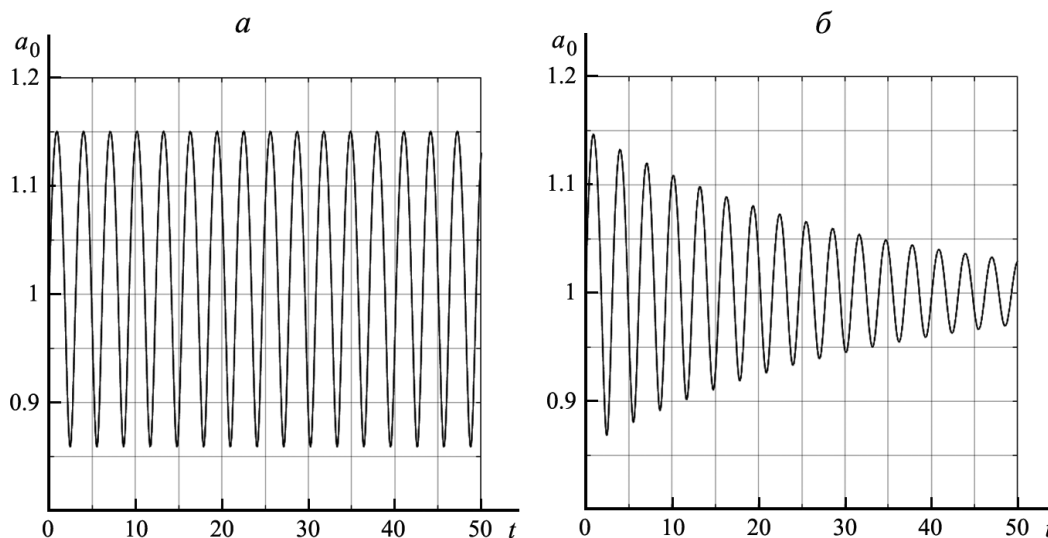


Рис. 1. Собственные колебания $a_0(t)$ в случае $\gamma = 1.4; v_0 = 0.3; c = 1$: *a* — идеальная среда, $Re = \infty$, *б* — вязкая жидкость, $Re = 62.11$

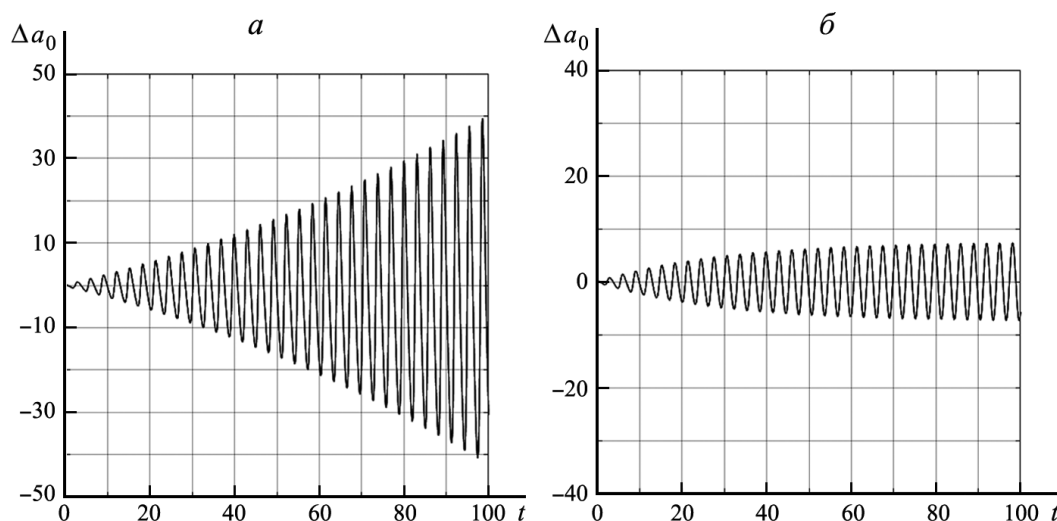


Рис. 2. Вынужденные колебания $\Delta a(t)$ в случае $\gamma = 1.4; v_0 = 0.3; c = 1$: *a* — идеальная среда, $Re = \infty$, *б* — вязкая жидкость, $Re = 62.11$

Выводы. В общем случае уравнение колебаний газового пузырька является нелинейным. Уравнение малых вынужденных колебаний получено методом линеаризации вблизи собственных колебаний газового пузырька. Проведен численный анализ построенной линейной модели вынужденных резонансных колебаний газового пузырька в линейной вязкой жидкости, а также выполнено сравнение полученных результатов с имеющимися классическими для невязкой среды. Как и ожидалось, вязкость среды проявляется в затухании как собственных, так и вынужденных колебаний. Тем не менее максимально возможная амплитуда колебаний реализуется только при частоте внешнего периодического давления, близкой к собственной частоте газового пузырька.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Lamb H.* Lehrbuch der Hydrodynamik. Leipzig; Berlin: Verlag-Teubner, 1931.
2. *Poritsky H.* The collapse or growth of a spherical bubble in a viscous fluid // Proc. 1st U.S. Nat. Congr. Appl. Mech. 1951. Ann Arbor, Mich., 1951. 812–821.
3. *Забабахин Е.И.* Заполнение пузырька в вязкой жидкости // Прикл. матем. и механ. 1960. **24**, вып. 6. 1129–1131.
4. *Киселев А.Б.* О динамическом сжатии (расширении) сферической полости в вязкой несжимаемой жидкости. Задача Забабахина // Прикл. физ. и матем. 2014. **6**. 15–19.

5. *Георгиевский Д.В., Жданова А.В.* Некоторые асимптотики в задаче о страгивании и схлопывании газового пузырька // Докл. РАН. 2004. **399**, № 2. 188–191.
6. *Аганин А.А., Нигматулин Р.И., Ильгамов М.А., Ахатов И.Ш.* Динамика пузырька газа в центре сферического объема жидкости // Докл. РАН. 1999. **369**, № 2. 182–185.
7. *Taleyarkhan R.P., West C.D., Cho J.S., Lahey R.T., Nigmatulin R.I., Block R.C.* Evidence of nuclear emissions during acoustic cavitation // Science. 2002. **295**. 1868–1873.

Поступила в редакцию
15.05.2019

**ПАМЯТИ РУДОЛЬФА АЛЕКСЕЕВИЧА ВАСИНА
(1937–2019)**



18 декабря 2019 года после продолжительной болезни скончался Рудольф Алексеевич Васин — доктор физико-математических наук, профессор кафедры теории упругости механико-математического факультета МГУ, заведующий лабораторией упругости и пластичности НИИ механики МГУ, действительный член Российской академии естественных наук, заслуженный научный сотрудник Московского университета, лауреат премии имени М.В. Ломоносова I степени (совместно с А.А. Ильюшиным и В.С. Ленским), член Национального комитета РФ по теоретической и прикладной механике; награжден медалями имени П.Л. Капицы РАЕН, “В память 850-летия Москвы”.

Р.А. Васин родился 11 августа 1937 года в г. Вязники Владимирской области в семье военнослужащего. В 1959 году он окончил механико-математический факультет МГУ по кафедре теории упругости, а в 1962 году — аспирантуру отделения механики. Вся его трудовая деятельность связана с Научно-исследовательским институтом механики МГУ и кафедрой теории упругости. В 1966 году на диссертационном совете МГУ он защитил кандидатскую диссертацию “Некоторые вопросы связи напряжений и деформаций при сложном нагружении”, а в 1987 году — докторскую диссертацию “Экспериментально-теоретическое исследование определяющих соотношений в теории упругопластических процессов”. Всего им опубликовано около 130 научных статей, написаны две монографии и большое число учебных пособий по физико-механическому практикуму. С 2001 года Р.А. Васин заведовал лабораторией упругости и пластичности НИИ механики МГУ и по совместительству лабораторией механики сверхпластичности в Институте проблем сверхпластичности металлов РАН в г. Уфе.

Научные интересы Р.А. Васина лежали в области теории упругопластических процессов, механики сверхпластичности, прочности тонкостенных конструкций. Им дано экспериментальное обоснование достоверности и степени точности главных постулатов теории упругопластических процессов, экспериментально и теоретически исследованы характерные свойства функционалов пластичности

при сложном нагружении, предложены новые варианты определяющих соотношений теории пластичности в самом широком смысле этого слова, проведены обширные экспериментальные исследования по прочности и устойчивости пластин и оболочек при ударных нагружениях, выполнены первые систематические работы по установлению корреляции между историей деформирования и эволюцией микроструктуры сплавов при сложном нагружении в режиме сверхпластичности, предложены и апробированы новые методы идентификации определяющих соотношений в механике сверхпластичности.

Для предложенного А.А. Ильюшиным метода СН-ЭВМ численно-экспериментального решения краевых задач теории пластичности Р.А. Васиным проведены многочисленные эксперименты (для случая одномерного напряженно-деформированного состояния) по исследованию сходимости метода в зависимости от типа определяющих соотношений материала, выбора аппроксимационных соотношений, начального приближения и истории деформирования. Им указаны некоторые необходимые условия сходимости метода, предложен и реализован в программах алгоритм использования процедуры СН-ЭВМ как специального метода численного решения краевых задач. Позднее метод СН-ЭВМ Р.А. Васиным и его учениками был развит применительно к задачам динамики, в том числе колебаний и устойчивости упругопластических пластин и оболочечных конструкций.

На протяжении всей жизни большое внимание Р.А. Васин уделял педагогической работе и подготовке научных кадров, читал оригинальные специальные курсы, в частности “Пластичность” (обязательный по кафедре), “Экспериментальная пластичность”, “Экспериментальные основы механики деформируемого твердого тела”, “Сверхпластичность металлов и технологические приложения” на механико-математическом факультете МГУ, в МАМИ и в молодые годы — в Высшей школе МВД СССР. Среди его учеников один доктор наук и шесть кандидатов наук. Р.А. Васин был постоянным участником научно-исследовательского семинара им. А.А. Ильюшина кафедры теории упругости, одним из основателей семинара по механике деформируемого твердого тела под руководством И.Г. Горячевой.

Многогранна была и общественно-научная деятельность Р.А. Васина. Он являлся членом бюро совета по механике деформируемого твердого тела РАН, членом ученого совета НИИ механики МГУ, специализированных диссертационных советов на механико-математическом факультете МГУ и в Институте проблем механики им. А.Ю. Ишлинского РАН, был членом редколлегий ряда журналов, входил в состав руководящих органов многих международных научных съездов, конференций и симпозиумов, являлся известным в стране квалифицированным экспертом в оценке научной значимости диссертаций, грантов и статей.

Друзья, коллеги и ученики глубоко скорбят об уходе Рудольфа Алексеевича Васина — талантливого ученого-механика, выдающегося экспериментатора, педагога, яркого представителя научной школы Алексея Антоновича Ильюшина. Память о нем останется в сердцах всех, кто его знал и работал вместе с ним.

*Г. Л. Бровко, Д. В. Георгиевский, В. И. Горбачёв, Э. Б. Завойчинская,
А. В. Звягин, В. П. Карликов, Е. В. Ломакин, Е. Д. Мартынова,
И. Н. Молодцов, А. В. Муравлёв, Н. В. Овчинникова, Э. Г. Тунгускова,
П. В. Чистяков, В. Н. Чубариков, А. И. Шафаревич, В. Я. Шкадов*